サマー講習　アドバンス理進物理　　物理数学
『やさしい高校数学　数Ⅱ・Ｂ(Gakken)』p.442～p.598

1　三角比

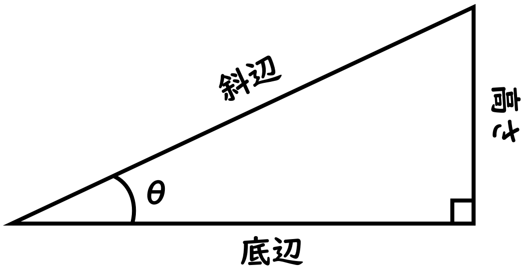
直角三角形の３辺の長さの比のこと

下図のように，角 θ が左下となるように，直角三角形を描く。このとき，

$\dfrac{\text{高さ}}{\text{斜辺}}$ の値を （　　　　）（　　　）

$\dfrac{\text{底辺}}{\text{斜辺}}$ の値を （　　　　）（　　　）

$\dfrac{\text{高さ}}{\text{底辺}}$ の値を （　　　　）（　　　）



と呼ぶ。

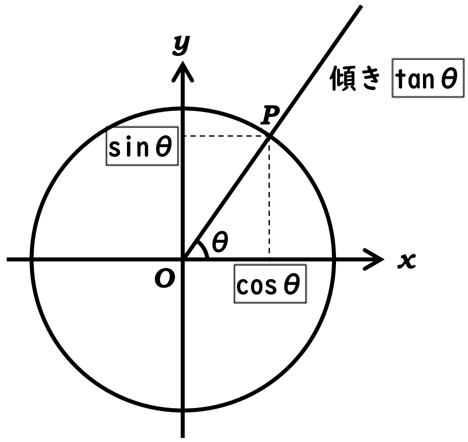
練習１
(1) $\theta=30°$ の直角三角形がある。$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値をそれぞれ求めよ。
(2) $\theta=45°$ の直角三角形がある。$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値をそれぞれ求めよ。
(3) $\theta=60°$ の直角三角形がある。$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値をそれぞれ求めよ。

▽有名角の三角比　早見表

	0°	３０°	４５°	６０°	９０°
$\sin\theta$					
$\cos\theta$					
$\tan\theta$					

2　単位円を利用した三角比の求め方

（　　　　　）…　半径１の円のこと



右図のように(1，0)の点から反時計回りにθだけ回転した点Pをとる。

すると，点Pのy座標がそのまま $\sin\theta$ となり，x座標が $\cos\theta$ となり，直線OPの傾きが $\tan\theta$ となる。

このことから次のような相互関係が成立することも理解できる。

三角比の相互関係

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

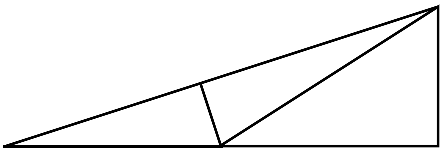
$$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

一般に，0°＜θ＜90° を「　　　」，−90°＜θ＜0°「　　　」と呼ぶ。

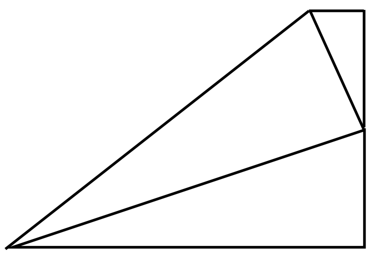
２倍角の公式

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

証１



証２



$\boxed{3}$ 極限

関数 $y=f(x)$ の x を a に限りなく近づけたとき $(x \neq a)$，$f(x)$ の値が限りなく b に近づくことを

と表す。このとき，b を（　　　　　　）という。

練習２

次の極限値を求めよ。

（１）$\lim_{x \to 3} x^2$　　（２）$\lim_{x \to 0} 2x^2$　　（３）$\lim_{t \to 4} at$

つまり，計算の上では与えられた文字に数字を代入することと同じである。

練習３

次の極限値を求めよ。

（１）$\lim_{t \to 2}(v_0 t + \frac{1}{2}at^2)$　　（２）$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$　　（３）$\lim_{x \to 2} \frac{-2x^2+x+6}{x^2+3x-10}$

代入して $\frac{0}{0}$ となるとき，この形を(　不定形　)とよぶ。代入して不定形が出る場合は，因数分解を活用しながら，約分を行ったのちに代入をする。

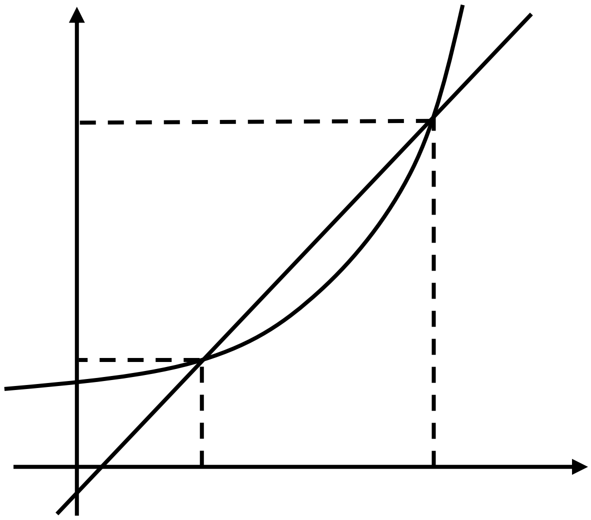
練習４

次の極限値を求めよ。

（１）$\lim_{\theta \to 0} sin\theta$　　（２）$\lim_{\theta \to 0} \frac{tan\theta}{sin\theta}$　　（３）$\lim_{\theta \to 0} \frac{sin2\theta}{sin\theta}$

$\boxed{4}$ 平均変化率

例えば，$y=f(x)$という曲線があるとする。この曲線上の $x=a$ のときの点と，$x=b$のときの点を通る直線の傾きを考える。



$x=a$のときの yの値は $f(a)$で，$x=b$のときの yの値は $f(b)$であるから，xの値の変化量は $b-a$，yの値の変化量は $f(b)-f(a)$となる。

ここから傾きを出すには，yの変化量を xの変化量で割ればよい。

平均変化率

$y=f(x)$の $x=a$から $x=b$までの平均変化率は

練習５

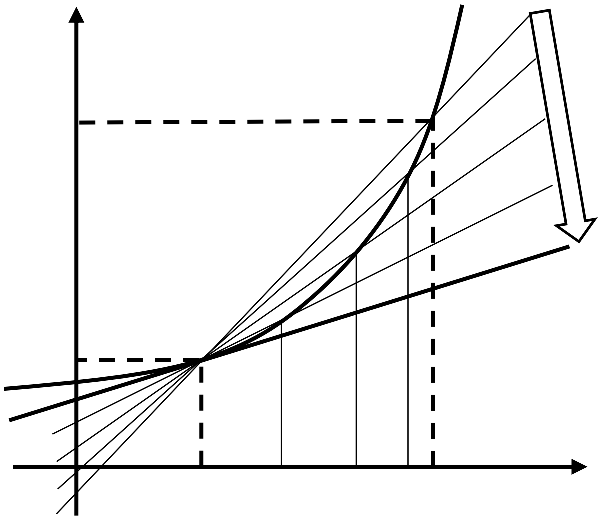
(１)関数 $y=-x^2+5x-7$ の $x=-2$ から $x=3$ までの平均変化率を求めよ。

(２)関数 $x=-4.9t^2+4.9t+8$ の $t=0$ から $t=1$ までの平均変化率を求めよ。

$\boxed{5}$ 微分係数

直線を表す関数のグラフは，変化の割合が一定で傾きはずっと同じである。しかし，曲線の変化の割合は一定ではない。

そこで昔の数学者は，曲線を細かく切り刻み，小さな直線の集まりだと考えれば，微小部分に関しては直線の変化率の式を使えるだろうと考えた。



$y=f(x)$ の $x=a$ から $x=b$ までの平均変化率は $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ である。

このとき、a と b が限りなく近ければ“一瞬の”変化の割合を求めることができる。これを，$x=a$ における(　　　　　　　)といい，$f'(x)$ と表すことにした。

微分係数

$y=f(x)$ の $x=a$ における微分係数は

$f'(x)=$

or

$f'(x)=$

練習６

$f(x)=x^2$ の $x=2$ における微分係数を，定義を用いて求めよ。

$\boxed{6}$ 導関数

実際に数学を使う場面を考えると，$x=a$ のときでしか使えない公式だと不便である。一般的に $y=f(x)$ の x 座標が x のときの変化率は次の式で計算できる。

導関数

$y=f(x)$ の導関数は

$f'(x)=$

導関数を求めることを(　　　　　　　　)といい，導関数の定義を(　微分の定義　)ともいう。

導関数に $x=a$ を代入すると微分係数が得られる。

練習7

$f(x)=x^2$ の導関数を，定義を用いて求めよ。

7 微分の公式

現実問題として，微分を計算するのに，毎回導関数の公式を適応したのであれば時間がかかる上にミスも発生しやすく，本質を見失ってしまう。

そこで次の公式を使って，ラクに微分を行う練習を積んでおくとよい。

微分公式

n が自然数のとき

$f(x)=x^n$　なら，　$f'(x)=$

$f(x)=x$　なら，　$f'(x)=$

$f(x)=$ 定数　なら，　$f'(x)=$

練習８

$f(x)=x^2$ を微分せよ。

練習９

（１）　$f(x)=x^3+2x+3$ を微分せよ。

（２）　$f(x)=x^3+7x^2-2x+5$ を微分せよ。

（３）　$f(x)=(x+2)^2$ を微分せよ。

練習１０

（１）　$f(t)=x_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2$ を t で微分せよ。

（２）　$f(t)=v_0+at$ を t で微分せよ。

等加速度運動３公式

v　　$=$

x　　$=$

　　$=$

サマー講習　アドバンス理進物理　　検算法

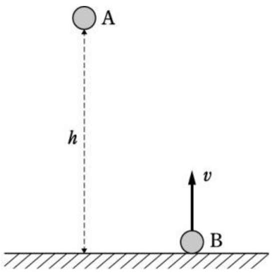
1　物理と数式

数量的な関係を追求する学問は数学を言葉として用いるが，物理学はその代表格である。したがって，物理学においては，数式に書き表されている内容を，言葉のように読み取ることができなければならない。

以下に示す例題は，問題を解くためではなく，数式を読み取る訓練を目的としているので，計算せずに正解を見つけること。

【問１】

図のように，高さ h の位置から小物体 A を静かにはなすと同時に，地面から小物体 B を鉛直上方に速さ v で投げ上げたところ，2 つの小物体は同時に地面に到達した。v を表す式として正しいものを，次の①～⑥のうちから１つ選べ。ただし，2 つの小物体は同一鉛直線上にないものとし，重力加速度の大きさを g とする。



2013 本試改

① gh　② gh^2　③ g^2h

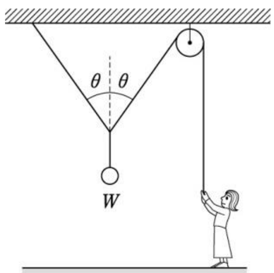
④ $\sqrt{\frac{gh}{2}}$　⑤ $\sqrt{\frac{gh^2}{2}}$　⑥ $\sqrt{\frac{g^2h}{2}}$

【問２】

図のように，ひもに重さ（物体にはたらく重力の大きさ）W の物体をつり下げ，ひもの一端は天井に固定し，他端は天井に固定したなめらかな滑車を通して手で支えたところ，ひもと鉛直方向のなす角は θ となった。

このとき，手に加わる力の大きさはいくらか。正しいものを，次の①～⑥のうちから１つ選べ。

ただし，ひもの質量は無視できるものとする。



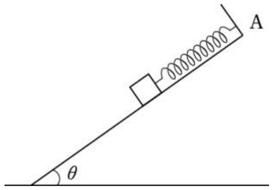
2001 追試改

① $W\cos\theta$　② $\frac{W}{\cos\theta}$　③ $\frac{W}{2\cos\theta}$

④ $W\sin\theta$　⑤ $\frac{W}{\sin\theta}$　⑥ $\frac{W}{2\sin\theta}$

【問３】

図のように，角度θだけ傾けた板の上端 A に，重さが無視できる自然の長さ l，ばね定数 k のばねの一端を固定して，ばねの他端に質量 m の小物体を取りつけたところ，小物体は A から x_0 だけ離れた位置でつりあった。x_0 はいくらか。正しいものを次の①～④のうちから１つ選べ。ただし，重力加速度の大きさを g とし，板と小物体の間に摩擦ははたらかないものとする。

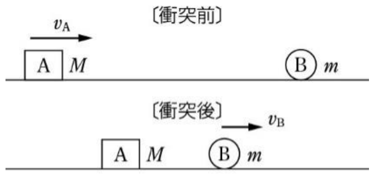


1999 本試　改

① $l+\frac{mg}{k}$　② $l+\frac{mg}{k}sin\theta$　③ $l+\frac{mg}{k}cos\theta$　④ $l+\frac{mg}{k}tan\theta$

【問４】

図のように，なめらかな水平面上を，大きさ v_A の一定の速度で進んできた質量 M の物体 A が，前方に静止していた質量 m の小球 B と完全弾性衝突した。



(1)　衝突直後の B の速さ

① $\frac{2M}{M-m}v_A$　② $\frac{2m}{M-m}v_A$　③ $\frac{2M}{M+m}v_A$　④ $\frac{2m}{M+m}v_A$

⑤ $\frac{2Mm}{M-m}v_A$　⑥ $\frac{2Mm}{M+m}v_A$　⑦ $\frac{2M^2}{M+m}v_A$　⑧ $\frac{2m^2}{M+m}v_A$

(2)　衝突直後の A の速さ

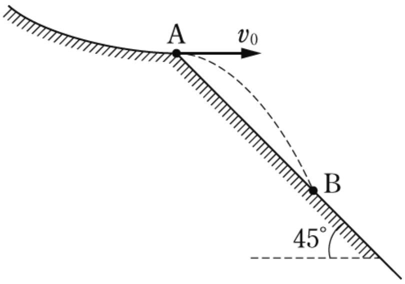
① $\frac{2M}{M-m}v_A$　② $\frac{2m}{M-m}v_A$　③ $\frac{2M}{M+m}v_A$　④ $\frac{2m}{M+m}v_A$

⑤ $\frac{M+m}{M-m}v_A$　⑥ $\frac{M-m}{M+m}v_A$　⑦ $\frac{2M}{(M+m)^2}v_A$　⑧ $\frac{2m}{(M+m)^2}v_A$

1　見かけの重力

【問1】リードα物理基礎　応用問題41改題

小球が右の図の点 A から速さ v_0〔m/s〕で水平方向に飛び出し，水平面と傾角 45°をなす斜面上の点 B に着地した。重力加速度の大きさを g〔m/s²〕とする。



(1) A から B までの所要時間 t は何秒か。

(2) A から B までの距離 l は何 m か。

(3) 点 B に着地する直前の小球の速さ v は何 m/s か。

【問1】解答

(1) 点Aを原点とし，水平に x 軸，鉛直下向きに y 軸をとる[1]。AB 間の高さの差を h〔m〕とすると，斜面が 45° であることから，AB 間の水平距離も h〔m〕となる。小球の水平方向の運動は，初速度 v_0〔m/s〕の等速度運動なので，距離と時間の関係式「$x=vt$」より

$$h=v_0t \quad \cdots\cdots①$$

一方，小球の鉛直方向の運動は，加速度 g〔m/s²〕の自由落下なので，

「$y=\frac{1}{2}gt^2$」より　$h=\frac{1}{2}gt^2$　……②

①式と②式より　$v_0t=\frac{1}{2}gt^2$　　$t\left(\frac{1}{2}gt-v_0\right)=0$

$t>0$ より　$t=\boldsymbol{\frac{2v_0}{g}}$〔s〕

(2) (1)の答えを①式に代入すると　$h=v_0\times\frac{2v_0}{g}=\frac{2v_0^2}{g}$

一方，l と h の間には

$$h=l\cos 45^\circ\ (=l\sin 45^\circ)=\frac{1}{\sqrt{2}}l$$

の関係があるので，

$$l=\sqrt{2}\,h=\sqrt{2}\times\frac{2v_0^2}{g}=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{2}\,v_0^2}{g}}\text{〔m〕}$$

(3) 点Bでの速度の x，y 成分を v_x，v_y とすると，x 方向は等速度運動なので　$v_x=v_0$

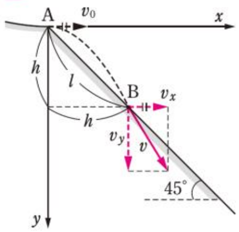
y 方向は「$v=gt$」の式より

$$v_y=gt=g\times\frac{2v_0}{g}=2v_0$$

三平方の定理より

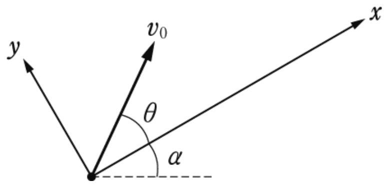
$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{v_0^2+(2v_0)^2}=\boldsymbol{\sqrt{5}\,v_0}\text{〔m/s〕}$$

1　下図参照



【問２】リードα物理基礎　応用問題４４改題

図のような傾角αの斜面上の１点から，小球を斜面の上に向かって斜面に対して角度θ，初速度 v_0で発射する($0^\circ < \alpha + \theta < 90^\circ$)。重力加速度の大きさを gとする。



(1) 斜面と衝突するまでの小球の運動で，発射から時間 t 後の斜面に平行な速度成分 v_x，斜面に垂直な速度成分 v_yを v_0，g，α，θ，tで表せ。

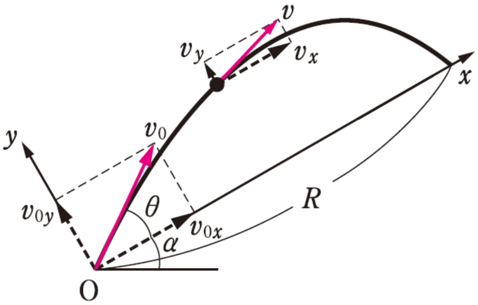
(2) 発射から斜面と衝突するまでの時間 t_0を v_0，g，α，θで表せ。

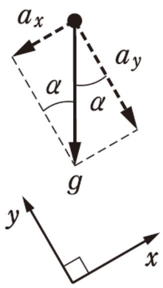
(3) 発射地点から衝突地点までの斜面にそっての到達距離 Rを v_0，g，α，θで表せ。必要があれば以下の式を用いよ。

$$\sin(A \pm B) = \sin A\cos B \pm \cos A\sin B$$
$$\cos(A \pm B) = \cos A\cos B \mp \sin A\sin B$$

(4) 小球が斜面に対して垂直に衝突するためには，θをどのような値にすればよいか。$\tan\theta$の値をαを用いて表せ。

【問２】解答





(1) 小球の加速度の x, y 方向の成分を $(a_x,\ a_y)$ とすると

$$a_x=-g\sin\alpha,\qquad a_y=-g\cos\alpha$$

また，初速度 v_0 の成分 $(v_{0x},\ v_{0y})$ は

$$v_{0x}=v_0\cos\theta,\qquad v_{0y}=v_0\sin\theta$$

よって，等加速度直線運動の式「$v=v_0+at$」より

$$v_x=v_{0x}+a_xt=\boldsymbol{v_0\cos\theta-g\sin\alpha\cdot t}\qquad\cdots\cdots①$$

$$v_y=v_{0y}+a_yt=\boldsymbol{v_0\sin\theta-g\cos\alpha\cdot t}$$

(2) 発射から時間 t 後の小球の位置を $(x,\ y)$ とする。「$x=v_0t+\dfrac{1}{2}at^2$」より

$$x=v_{0x}t+\frac{1}{2}a_xt^2=v_0\cos\theta\cdot t-\frac{1}{2}g\sin\alpha\cdot t^2\qquad\cdots\cdots②$$

$$y=v_{0y}t+\frac{1}{2}a_yt^2=v_0\sin\theta\cdot t-\frac{1}{2}g\cos\alpha\cdot t^2\qquad\cdots\cdots③$$

$t=t_0$ のとき，斜面に衝突するから $y=0$ である。③式より

$$0=v_0\sin\theta\cdot t_0-\frac{1}{2}g\cos\alpha\cdot t_0{}^2$$

$t_0>0$ より $\quad t_0=\boldsymbol{\dfrac{2v_0\sin\theta}{g\cos\alpha}}\qquad\cdots\cdots④$

(3) 到達距離 R は，$t=t_0$ のときの x の値なので，②，④式より

$$R=v_0\cos\theta\cdot t_0-\frac{1}{2}g\sin\alpha\cdot t_0{}^2$$

$$=\frac{2v_0{}^2\sin\theta(\cos\theta\cos\alpha-\sin\theta\sin\alpha)}{g\cos^2\alpha}$$

$$=\boldsymbol{\frac{2v_0{}^2\sin\theta\cos(\theta+\alpha)}{g\cos^2\alpha}}$$ ❶❷

(4) 衝突のときの速度の x 成分が 0 であればよい。①，④式より

$$v_0\cos\theta-g\sin\alpha\cdot\frac{2v_0\sin\theta}{g\cos\alpha}=0$$

整理すると

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\cos\alpha}{2\sin\alpha}$$ よって $\tan\theta=\boldsymbol{\dfrac{1}{2\tan\alpha}}$ ❸

【問３】2016 関西大学　改題

〔予備知識〕

・静電気の力がはたらく空間のことを　電場　という。

・静電気力の大きさは，電気量を q，電場を E とすると，$F=qE$ とかける。

図 3 のように，強さが E で水平方向右向きの一様な電場(電界)中に，水平面となす角 φ のなめらかな斜面がある。この斜面上には，質量が m で電気量が $q(>0)$ の小球がある。小球と斜面の間で電荷の移動はなく，また斜面は電場の影響を受けないものとする。

小球が斜面上にある(つまり，小球にはたらく垂直抗力が正である)ためには，電場の強さ E は条件 $\boxed{\ (1)\ }$ を満たさなければならない。この条件が満たされるとき，斜面に沿って小球にはたらく力の大きさは

$m\times\boxed{\ (2)\ }\quad+\quad q\times\boxed{\ (3)\ }$

である。

P 点にある小球の重力による位置エネルギーは，P 点から斜面に沿って距離 d だけ下方にある C 点を基準に選べば，$m\times\boxed{\ (4)\ }$ である。また，静電気力による位置エネルギーも，同様に C 点を基準に選べば，$q\times\boxed{\ (5)\ }$ である。

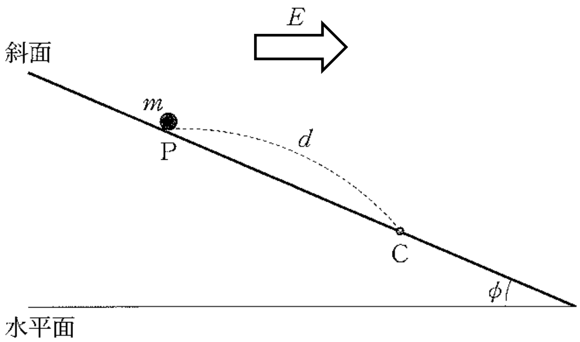


図3

〔解答群〕

（ア） $E < \frac{mgsin\varphi}{qcos\varphi}$　（イ） $E < \frac{mgcos\varphi}{qsin\varphi}$　（ウ） $E < \frac{qsin\varphi}{mgcos\varphi}$

（エ） $E < \frac{qcos\varphi}{mgsin\varphi}$　（オ） $E > \frac{mgsin\varphi}{qcos\varphi}$　（カ） $E > \frac{mgcos\varphi}{qsin\varphi}$

（キ） $E > \frac{qsin\varphi}{mgcos\varphi}$　（ク） $E > \frac{qcos\varphi}{mgsin\varphi}$　（ケ） $gsin\varphi$

（コ） $gcos\varphi$　（サ） $Esin\varphi$　（シ） $Ecos\varphi$

（ス） $-gsin\varphi$　（セ） $-gcos\varphi$　（ソ） $-Esin\varphi$

（タ） $-Ecos\varphi$　（チ） $gdsin\varphi$　（ツ） $gdcos\varphi$

（テ） $Edsin\varphi$　（ト） $Edcos\varphi$　（ナ） $-gdsin\varphi$

（ニ） $-gdcos\varphi$　（ヌ） $-Edsin\varphi$　（ネ） $-Edcos\varphi$

（ノ） $\frac{gsin\varphi}{d}$　（ハ） $\frac{gcos\varphi}{d}$　（ヒ） $\frac{Esin\varphi}{d}$

（フ） $\frac{Ecos\varphi}{d}$　（ヘ） $\frac{-gsin\varphi}{d}$　（ホ） $-\frac{gcos\varphi}{d}$

（マ） $-\frac{Esin\varphi}{d}$　（ミ） $-\frac{Ecos\varphi}{d}$