2020 京大

I(1)

▷ア　振動の中心は、力のつり合いの点となる
このときのばねの伸びをx_0とすると、小球2にはたらく力のつり合いの式より、

$$kx_0 = mg$$

$$x_0 = \frac{mg}{k}$$

よって小球2の位置は

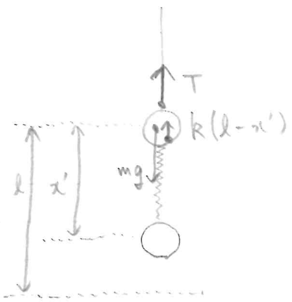
$$l + x_0 = \underline{l + \frac{mg}{k}}\ /\!/$$

▷イ　小球は、つり合いの位置から、長さ d だけ引き下げられているので、

$$\text{振幅} = \underline{d}\ /\!/$$

となる。

▷ウ　ばねが縮んでいるとき、小球1にはたらく力のつり合いの式は



糸がたるみ始めた瞬間のばねの長さをx'とすると

$$T + k(l - x') = mg$$

となる　また、糸がたるむので $T=0$ とできるから

$$k(l - x') = mg$$

よって

$$x' = \underline{l - \frac{mg}{k}}\ /\!/$$

▷エ　小球2が振動の中心にいるとき、ばねの長さは $l + x_0$ であり、
振動の上端にいるときは、$l + x_0 - d$ である
糸がたるむためには、振動の上端が、糸がたるむ瞬間の小球2の位置 x' より上にあればよいので、

$$l + x_0 - d < x'$$

$$l + \frac{mg}{k} - d < l - \frac{mg}{k}$$

よって

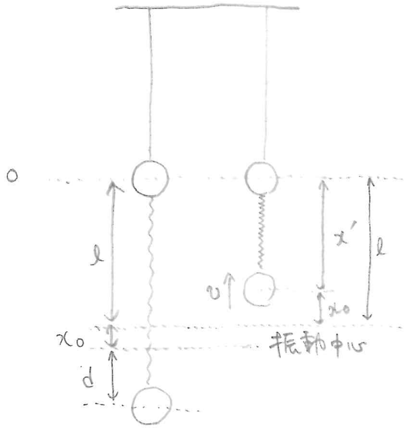
$$d > \underline{\frac{2mg}{k}}\ /\!/$$

2020 京大

I (1)

▶ オ

(i) 力学的エネルギー保存則で解く



原点を高さの基準として、小球2について力学的エネルギー保存則を立てると、

$$\frac{1}{2}k(x_0+d)^2 - mg(l+x_0+d) = \frac{1}{2}k(l-x')^2 + \frac{1}{2}mv^2 - mgx'$$

$x_0 = \frac{mg}{k}$, $x' = l - x_0 = l - \frac{mg}{k}$ であるから、

$$(左辺) = \frac{1}{2}k(\cancel{x_0^2}+2x_0d+d^2) - mg(\cancel{l}+x_0+d)$$

$$(右辺) = \cancel{\frac{1}{2}kx_0^2} + \frac{1}{2}mv^2 - mg(\cancel{l}-x_0)$$

$$\cancel{kx_0d} + \frac{1}{2}kd^2 - mg(x_0+\cancel{d}) = \frac{1}{2}mv^2 + mgx_0$$

$$\frac{1}{2}kd^2 - mgx_0 = \frac{1}{2}mv^2 + mgx_0$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kd^2 - 2mgx_0$$

$$= \frac{1}{2}kd^2 - \frac{2(mg)^2}{k}$$

$$v^2 = \frac{kd^2}{m} - \frac{4mg^2}{k}$$

$$v = \sqrt{\frac{kd^2}{m} - \frac{4mg^2}{k}}$$

このとき小球1は動いていないので、重心の速さを v_G とすると重心の速さは、

$$v_G = \frac{v}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{kd^2}{m} - \frac{4mg^2}{k}}$$ //

(ii) 単振動のエネルギー保存則で解く

振動中心を基準として、小球2について、力学的エネルギー保存則を立てると

$$\cancel{\frac{1}{2}}kd^2 + 0 = \cancel{\frac{1}{2}}k(2x_0)^2 + \cancel{\frac{1}{2}}mv^2$$

$$v = \sqrt{\frac{kd^2}{m} - \frac{4kx_0^2}{m}} = \sqrt{\frac{kd^2}{m} - \frac{4mg^2}{k}}$$

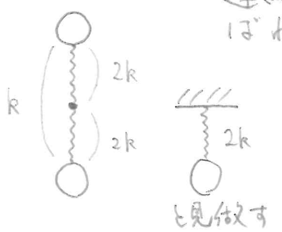
上と同様にして

$$v_G = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{kd^2}{m} - \frac{4mg^2}{k}}$$ //

2020 京大

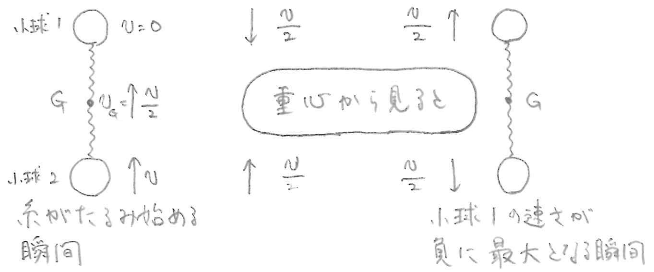
I (1)

▷ カ　連結バネの重心から見ると、
ばね定数 2k のばねが天井から吊るされていることと
同等であると見做せるので、



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$$

▷ キ　小球の"速度"が最小値をとる瞬間
= 小球1が負の向き(鉛直上方)に"速さ"最大となる瞬間



$$相対速度 = \frac{v}{2} - \left(-\frac{v}{2}\right) = v = 2v_G$$

よって　2倍

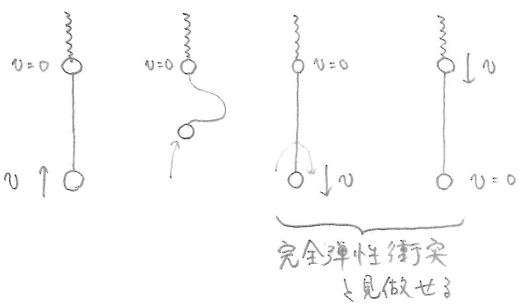
I (2)

▷ ク　張力がないので(ア)の導出と同様にして

$$kx_0 = mg$$

$$x_0 = \frac{mg}{k}$$

▷ ケ　小球1, 2の力学的エネルギーの和が保存されるので、
e=1の完全弾性衝突と同じ変化が起こると判断できる
小球1, 2は、ともに質量mなので、速度交換が行われる



よって

$$v_2 = 0$$

2020 京大

I (2)

▷コ　たるみがなくなった直後は、小球2の速度が0となるので、小球1は単独で単振動を始める

$$v = A\omega \quad より$$

$$v = A\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\therefore A = v\sqrt{\frac{m}{k}} \;//$$

▷サ　(ケ)のように糸を媒介せず、直接的に弾性衝突する場合も、速度交換が成立するので衝突直後の小球1の速度は、衝突直前の小球2の速度と同じとなる。

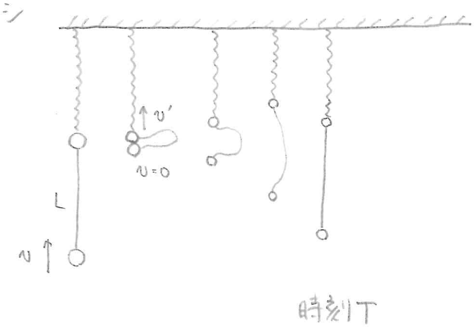
この速度を v_2 とおくと、小球2についての力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgL + \frac{1}{2}mv_2^2$$

$$v^2 = 2gL + v_2^2$$

$$v_2 = \sqrt{v^2 - 2gL} \;// \quad (= v')$$

▷シ



時刻Tの直後に、

$v_1 > v_2$ であれば、糸はたるむ。

$v_1 < v_2$ であれば、速度交換が起きて、$v_1 > v_2$ となるので、糸はたるむ。

よって、糸がたるまないためには

$v_1 = v_2$ とならなければいけないので、

相対速度 $= 0 \;//$ となる。

▷ス　Fについての記述より

時刻Tの直前に $F \geqq 0$

時刻Tで $F > 0$ ならば直後に糸がたるんでしまう $\Leftrightarrow$ 時刻Tの直前に $F \leqq 0$ でなければならない

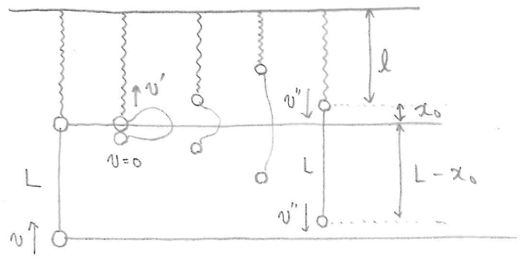
以上を満たすのは $F = 0$ のとき。

つまり、ばねから力を及ぼされないということは自然長のとき $\therefore x_1 = 0 \;//$

2020 京大

I (2)

▷ セ



時刻T

v'' 未知数につき、一体化すると考えて衝突の式を立てると求まらない。
ここではエネルギー保存則を用いるとよい。

小球1 $\quad \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}mv''^2 + mgx_0$

$-)$ 小球2 $\quad 0 = \frac{1}{2}mv''^2 - mg(L-x_0)$

$$\frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 = mgx_0 + mg(L-x_0)$$

↓ (サ) $v' = \sqrt{v^2-2gL}$, (ワ) $x_0 = \frac{mg}{k}$

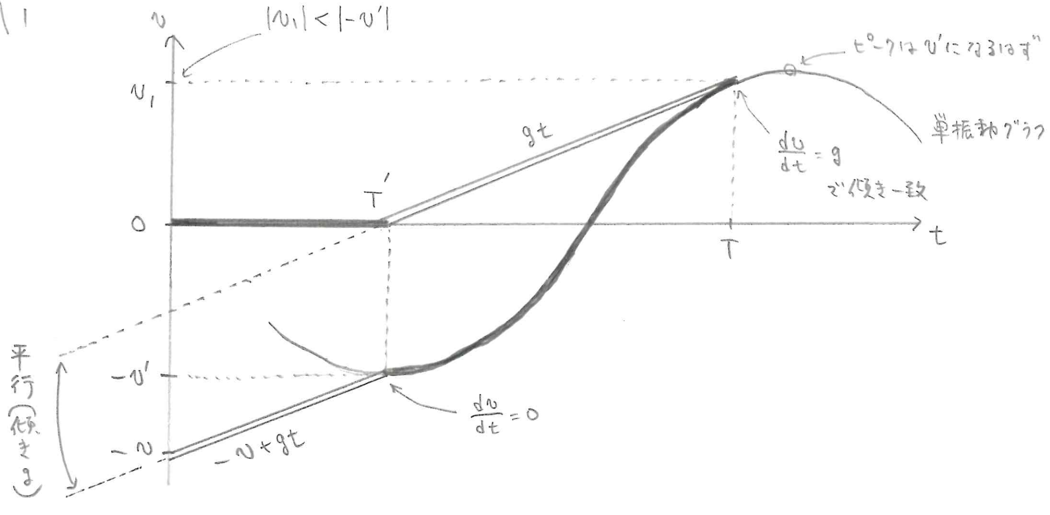
$$\frac{1}{2}m(v^2-2gL) + \frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k}\right)^2 = mgL$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - mgL + \frac{(mg)^2}{2k} = mgL$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = 2mgL - \frac{(mg)^2}{2k}$$

$$v^2 = 4gL - \frac{mg^2}{k}$$

問1



2020 京大

II (1)

▷ イ　キルヒホッフ第2法則より

$$-L\frac{\Delta I}{\Delta t} - V = 0$$

∴

$$L\frac{\Delta I}{\Delta t} = \underline{-V}$$

▷ ロ　$\Delta Q = C\Delta V$ と $\Delta Q = I\Delta t$ を利用して

$$C\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{I\Delta t}{\Delta t} = \underline{I}$$

▷ ハ　(ロ)において $\Delta t \to 0$ の極限をとると

$$C\frac{dV}{dt} = I$$

となる。ここで $V \equiv V_0 \sin\omega t$ とおく（ただし、V_0 は問題文より $V_0 \equiv \frac{Q_0}{C}$）

$$\frac{dV}{dt} = V_0\omega\cos\omega t$$

$$C\frac{dV}{dt} = CV_0\omega\cos\omega t = C\cdot\frac{Q_0}{C}\cdot\omega\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = Q_0\omega\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = I$$

となるので

I は V よりも $\frac{\pi}{2}$ 進む

$=$ $\underline{V \text{ は } I \text{ よりも } \frac{\pi}{2} \text{ 遅れる}}$

▷ ニ　問題に明示はしていないが、回路中の導線に抵抗はなく、エネルギーが保存されたまま電気振動していると考えているので、

$$\frac{1}{2}CV_0^2 = \frac{1}{2}LI_0^2 \text{ より}$$

$$I_0 = V_0\sqrt{\frac{C}{L}}$$

$Q = CV_0$

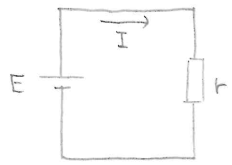
$V_0 = \frac{Q}{C}$

$$= \frac{Q_0}{C}\sqrt{\frac{C}{L}} = \underline{Q_0\frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

2020 京大

II (2)

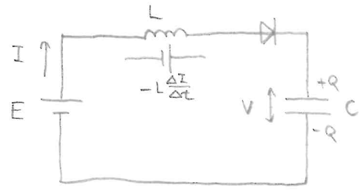
▷ホ　十分長い間スイッチを閉じているので、コンデンサーには電流が流れない。
このとき キルヒホッフ第2法則より



$$E - rI = 0$$

$$\therefore \quad I = \frac{E}{r}$$

▷ヘ　スイッチを開けた後、Iは減少し始める、とあるので、
$\Delta I < 0$ である。このとき、コイルに発生する誘導起電力の向きを考慮すると、



図の右回りを電流の正としているので、
誘導起電力は

$$-L\frac{\Delta I}{\Delta t}$$

と書ける

このとき キルヒホッフ第2法則より

$$E - L\frac{\Delta I}{\Delta t} - V = 0$$

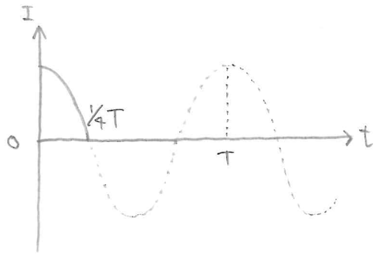
$$L\frac{\Delta I}{\Delta t} = E - V = -V'$$

▷ト　$V' = V - E$ より $\Delta V' = \Delta V$ であるので

$$C\frac{\Delta V'}{\Delta t} = C\frac{\Delta V}{\Delta t}$$

$$= \frac{\Delta Q}{\Delta t} = I$$

▷チ　振動が続いたとすると、前問より、$T = 2\pi\sqrt{LC}$ の周期で振動するが、
いま、ダイオードが存在するため、Iが負にならないので、振動は $\frac{1}{4}T$ で
停止する



よって

$$T_1 = \frac{T}{4}$$

$$= \frac{1}{4}\cdot 2\pi\sqrt{LC}$$

$$= \frac{\pi}{2}\sqrt{LC}$$

2020　京大

Ⅱ(1)

問1　。コイルに蓄えられた初期のエネルギーは

$$\frac{1}{2}LI_0^2 \quad \text{——— ①}$$

。電源から供給されるエネルギーは

コンデンサーに蓄えられる電気量が

$t=0$ で CE

$t=T_1$ で CV であるとして

この間に $C(V-E)$ だけ増加するので

$U=QE$ より

$$=CE(V-E) \quad \text{——— ②}$$

。コンデンサーに蓄えられるエネルギーは

$t=0$ で $\frac{1}{2}CE^2$

$t=T_1$ で $\frac{1}{2}CV^2$ のエネルギーを持つことから

$$U=\frac{1}{2}CV^2-\frac{1}{2}CE^2$$

$$=\frac{1}{2}C(V^2-E^2) \quad \text{——— ③}$$

エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}C(V^2-E^2)=\frac{1}{2}LI_0^2+CE(V-E)$$

$$\frac{1}{2}CV^2-CEV-\frac{1}{2}CE^2-\frac{1}{2}LI_0^2+CE^2=0$$

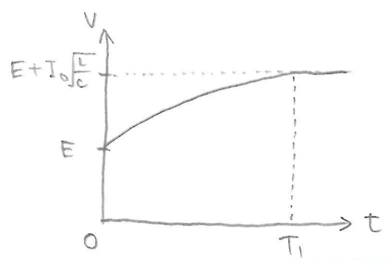
$$\frac{1}{2}CV^2-CEV+\frac{1}{2}CE^2-\frac{1}{2}LI_0^2=0$$

$$V^2-2EV+E^2-\frac{L}{C}I_0^2=0$$

$$V=E+\sqrt{E^2-E^2+\frac{L}{C}I_0^2}$$

$$=E+I_0\sqrt{\frac{L}{C}}$$

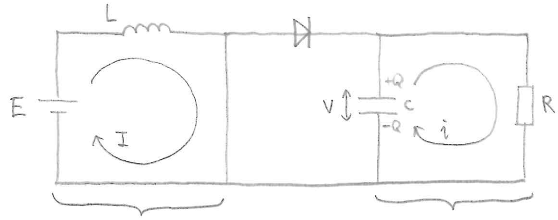
以上より　グラフは次のとおり



2020　京大

Ⅱ(3)

▷り　スイッチが閉じた状態（Δt_1 の間）



回路Ⅰ　　回路Ⅱ　とする

回路Ⅰで、キルヒホッフ第2法則より

$$E - L\frac{\Delta I_1}{\Delta t_1} = 0$$

$$L\frac{\Delta I_1}{\Delta t_1} = \underline{E}_{//}$$

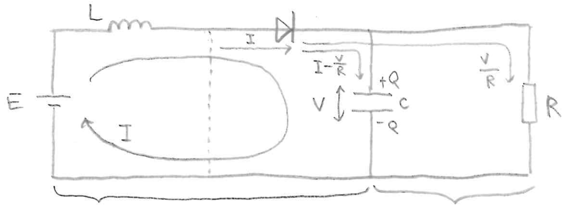
▷ヌ　回路Ⅱで

$$\begin{cases} \Delta Q = C\Delta V_1 \\ i = -\dfrac{\Delta Q}{\Delta t_1} \end{cases}$$ より

$$C\frac{\Delta V_1}{\Delta t_1} = \frac{\Delta Q}{\Delta t_1} = -i$$

$$= \underline{-\frac{V}{R}}_{//}$$

▷ル　スイッチが開いた状態（Δt_2 の間）



回路Ⅲ　　回路Ⅳ　とする

回路Ⅲで キルヒホッフ第2法則より

$$E - L\frac{\Delta I_2}{\Delta t_2} - V = 0$$

$$L\frac{\Delta I_2}{\Delta t_2} = \underline{E - V}_{//}$$

2020 京大

II (3)

▶ヲ　回路IVで、

$$\begin{cases} \Delta Q = C\Delta V_2 \\ I - \dfrac{V}{R} = \dfrac{\Delta Q}{\Delta t_2} \end{cases}$$ より

$$C\frac{\Delta V_2}{\Delta t_2} = \frac{\Delta Q}{\Delta t_2} = \underline{I - \frac{V}{R}}$$

問2　(1)(ル)より

$$\Delta I_1 + \Delta I_2 = 0$$

$$\frac{E}{L}\Delta t_1 + \frac{E - V_0}{L}\Delta t_2 = 0$$

(ヌ)(ヲ)より

$$\Delta V_1 + \Delta V_2 = 0$$

$$-\frac{V_0}{CR}\Delta t_1 + \frac{I_0 - \frac{V_0}{R}}{C}\Delta t_2 = 0$$

$\Delta t_1 = \alpha \Delta t_2$ なので

$$\begin{cases} \dfrac{E}{L}\alpha\Delta t_2 + \dfrac{E - V_0}{L}\Delta t_2 = 0 \\ -\dfrac{\alpha V_0}{CR}\Delta t_2 + \dfrac{RI_0 - V_0}{CR}\Delta t_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha E + (E - V_0) = 0 \\ -\alpha V_0 + (RI_0 - V_0) = 0 \end{cases}$$

$$E - V_0 = -\alpha E$$

$$V_0 = E + \alpha E = \underline{E(1+\alpha)}$$

$$-\alpha V_0 + RI_0 - V_0 = 0$$

$$-(1+\alpha)V_0 + RI_0 = 0$$

$$I_0 = (1+\alpha)\cdot\frac{V_0}{R}$$

$$= \underline{(1+\alpha)^2 \cdot \frac{E}{R}}$$

2020 京大

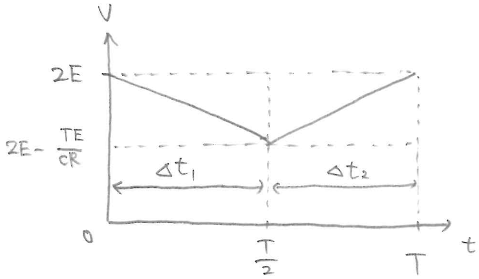
Ⅱ(3)

問2 つづき　$\alpha = 1$ のとき、$\begin{cases} V_0 = 2E \\ I_0 = 2 \cdot \dfrac{E}{R} \\ \Delta t_1 = \Delta t_2 \end{cases}$ となる.

また、

$$\Delta V_1 = -\frac{V_0}{CR}\Delta t_1 \quad , \quad \Delta V_2 = \frac{I_0 - \frac{V_0}{R}}{C}\Delta t_2$$ より

$$\frac{\Delta V_1}{\Delta t_1} = -\frac{2E}{CR} \quad , \quad \frac{\Delta V_2}{\Delta t_2} = \frac{2E}{CR}$$ となるので.



問3.　$V_0 = E(1+\alpha)$ であるから

$$P = \frac{V_0^2}{R} = \frac{V^2}{R}$$
$$= \frac{(1+\alpha)^2 E^2}{R}$$

一方, 図5の抵抗で消費される電力 P_0 は

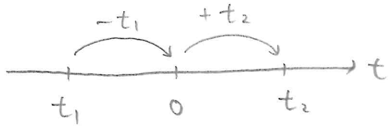
$$P_0 = \frac{E^2}{R}$$

であるから,　$\underline{(1+\alpha)^2 \text{ 倍}}$

2020 京大

III

▶ あ　　$t_1 < 0$ であることに注意すると



$t_1 \sim 0$ の時間は $-t_1$
$0 \sim t_2$ の時間は t_2
となる

粒子が $x = L_1$ から $x = 0$ まで進むとき

$$L_1 = v \times (-t_1)$$

$$t_1 = -\frac{L_1}{v}$$

だけ経過する
壁Bは、この間に速度 w で $L - L_1$ だけ進むので、

$$L - L_1 = w \times (-t_1)$$

$$= w \times \frac{L_1}{v}$$

$$L = L_1 + \frac{w}{v} L_1$$

$$= \frac{v + w}{v} L_1$$

$$\therefore \quad L_1 = \underline{\frac{v}{v + w} L}$$

▶ い　　(あ)と同様に、粒子が $x = 0$ から $x = L_2$ まで進むとき

$$t_2 = \frac{L_2}{v}$$

だけ経過し、壁Bは、この間に速度 w で $L_2 - L$ だけ進むので

$$L_2 - L = w t_2$$

$$= w \cdot \frac{L_2}{v}$$

$$L = L_2 - \frac{w}{v} L_2$$

$$= \frac{v - w}{v} L_2$$

$$\therefore \quad L_2 = \underline{\frac{v}{v - w} L}$$

2020 京大

Ⅲ

▷う

$$T_{12} = t_2 - t_1 \quad \text{より}$$

$$\begin{aligned}
T_{12} &= \frac{L_2}{v} + \frac{L_1}{v} \\
&= \frac{1}{v}\left(\frac{v}{v-w}L + \frac{v}{v+w}L\right) \\
&= \underline{\frac{2v}{v^2-w^2}L}
\end{aligned}$$

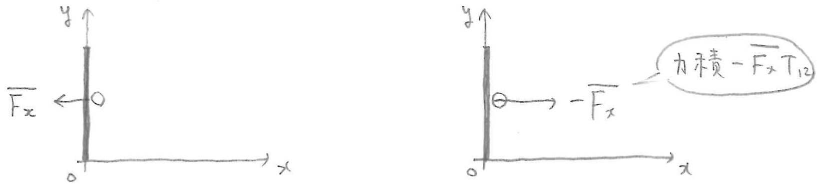
分子,分母に,それぞれ $\frac{1}{v^2}$ をかける.

▷え

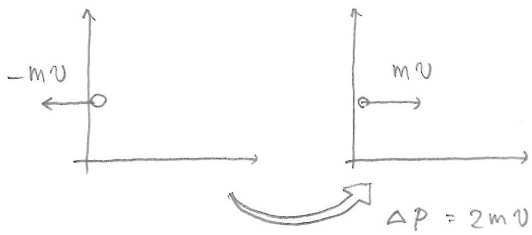
$$\begin{aligned}
T_{12} &= \frac{\frac{2}{v}}{1-\left(\frac{w}{v}\right)^2}L \\
&\fallingdotseq \underline{\frac{2}{v}L}
\end{aligned}$$

▷お

$\underbrace{\text{壁Aがうける力の時間平均}\ \overline{F_x}}$ は, $\underbrace{\text{粒子がうける力積}\ -\overline{F_x}\,T_{12}}$ が



時刻 $t=0$ での $\underbrace{\text{粒子の運動量の変化}}$ に等しい



$\Delta P = 2mv$

とあるので

$$\begin{aligned}
-\overline{F_x}\,T_{12} &= 2mv \\
\overline{F_x} &= -\frac{2mv}{T_{12}} \\
&\fallingdotseq -\frac{mv^2}{L} \qquad \left(\because T_{12} \fallingdotseq \frac{2L}{v}\right)
\end{aligned}$$

よって

$$P = \frac{F}{S} \quad \text{より}$$

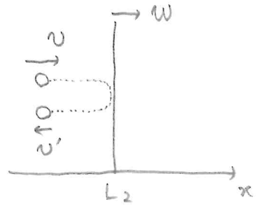
$$P = \underline{\frac{mv^2}{L^3}}$$

2020 京大

III

▷か 弾性衝突しているので、反発係数は $e=1$ となる

$$e = \frac{v'+w}{v-w} = 1$$



これを v' について解くと

$$v'+w = v-w$$
$$v' = v-2w$$

となるので

$$\underline{a = 2}$$

▷き $t_2 \sim t_3$ 間での時間において(あ)(い)と同様の計算によって

$$\begin{cases} \langle\text{壁について}\rangle & L_3 - L_2 = w(t_3 - t_2) \\ \langle\text{粒子について}\rangle & L_2 = v'(t_3 - t_2) \end{cases}$$

となるので

$$L_3 - L_2 = w \cdot \frac{L_2}{v'}$$
$$L_3 = \frac{v'+w}{v'} L_2$$
$$= \frac{v'+w}{v'} \cdot \frac{v}{v-w} L$$
$$= \underline{\frac{v(v'+w)}{v'(v-w)} L}$$

▷く

$$P = \frac{mv^2}{L^3} \quad \text{より} \quad P' = \frac{mv'^2}{L_3^3}$$

ここで、

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{P'-P}{P} = \frac{P'}{P} - 1$$

であるから この第一項について計算すると

$$\frac{P'}{P} = \frac{\frac{mv'^2}{L_3^3}}{\frac{mv^2}{L^3}} = \frac{v'^2 L^3}{v^2 L_3^3}$$

$$= \frac{v'^2 L^3}{v^2 \left\{\frac{v(v'+w)}{v'(v-w)} L\right\}^3} = \frac{v'^5 (v-w)^3}{v^5 (v'+w)^3}$$

2020 京大

III

▷く つづき

$$\frac{P'}{P} = \frac{v'^5(v-w)^3}{v^5(v'+w)^3}$$

$$= \frac{(v-aw)^5(v-w)^3}{v^5(v-aw+w)^3}$$

$$= \left(1-a\frac{w}{v}\right)^5 (v-w)^3 \left\{v+(1-a)w\right\}^{-3}$$

$$= \left(1-a\frac{w}{v}\right)^5 \cdot \cancel{v^3}\left(1-\frac{w}{v}\right)^3 \cdot \cancel{v^{-3}}\left\{1+(1-a)\frac{w}{v}\right\}^{-3}$$

$$= \left(1-a\frac{w}{v}\right)^5 \left(1-\frac{w}{v}\right)^3 \left\{1+(1-a)\frac{w}{v}\right\}^{-3}$$

$$\fallingdotseq 1+\left\{-5a-3+3(a-1)\right\}\frac{w}{v}$$

$$= 1-2(a+3)\frac{w}{v}$$

であるから

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{P'}{P}-1$$

$$= 1-2(a+3)\frac{w}{v} \quad -1$$

$$= \underline{-2(a+3)}\cdot\frac{w}{v}$$

▷け

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{V'-V}{V} = \frac{V'}{V}-1$$

であるから この第一項について計算すると

$$\frac{V'}{V} = \frac{L'^3}{L^3} = \frac{\left\{\frac{v(v'+w)}{v'(v-w)}\right\}^3 L^3}{L^3}$$

$$= \left\{\frac{v(v-aw+w)}{(v-aw)(v-w)}\right\}^3$$

それぞれの( )からvをくくる

$$= \left\{\frac{v^2\left(1-a\frac{w}{v}+\frac{w}{v}\right)}{v^2\left(1-a\frac{w}{v}\right)\left(1-\frac{w}{v}\right)}\right\}^3$$

$$= \left\{1+\frac{w}{v}(1-a)\right\}^3\left(1-a\frac{w}{v}\right)^{-3}\left(1-\frac{w}{v}\right)^{-3}$$

2020 京大

III

▷け　つづき

$$\frac{V'}{V} = \left\{1+\frac{w}{v}(1-a)\right\}^3\left(1-a\frac{w}{v}\right)^{-3}\left(1-\frac{w}{v}\right)^{-3}$$

$$\fallingdotseq 1+\left(3(1-a)+3a+3\right)\frac{w}{v}$$

$$= 1+6\frac{w}{v}$$

であるから

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{V'}{V}-1$$

$$= 1+6\frac{w}{v}-1$$

$$= \underline{6\cdot\frac{w}{v}}$$

▷こ　以上より

$$\frac{\Delta P}{P}+\gamma\frac{\Delta V}{V} = 0$$

$$-2(a+3)\cdot\frac{w}{v}+\gamma\cdot 6\frac{w}{v} = 0$$

$$6\gamma = 2(a+3)$$

$$\gamma = \frac{1}{3}(a+3)$$

▷さ　問題文より，P，V，T のそれぞれが微小に変化しても状態方程式が成立するので

$$(P+\Delta P)(V+\Delta V) = nR(T+\Delta T)$$

$$\cancel{PV}+P\Delta V+\Delta PV+\Delta P\Delta V = \cancel{nRT}+nR\Delta T$$

$PV=nRT$ と $\Delta P\Delta V \fallingdotseq 0$ より

$$P\Delta V+\Delta PV = nR\Delta T$$

さらに $PV=nRT$ を両辺の分母に持ってくると

$$\frac{P\Delta V+\Delta PV}{PV} = \frac{nR\Delta T}{nRT}$$

∴

$$\frac{\Delta V}{V}+\frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta T}{T}$$

(iv) より

$$\frac{\Delta V}{V}-\gamma\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta T}{T}$$

2020 京大

Ⅲ

▷さ つづき

$$\frac{\Delta V}{V} - \gamma\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta T}{T}$$

$$\frac{\Delta T}{T} + \underline{(\gamma-1)}\frac{\Delta V}{V} = 0$$

▷し この結果で，(か) $\alpha = 2$ として

$$(こ) = \gamma = \frac{1}{3}(2+3)$$

$$= \underline{\frac{5}{3}}$$

問1 $E = \frac{5}{3}K_x$ が成り立ち，$K_x = \frac{1}{2}mv^2$ であることに注意すると

衝突前後でのエネルギー保存則は

$$\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mw^2 = \frac{5}{3}\cdot\frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}Mw'^2 \quad \text{——①}$$

また運動量保存則は

$$mv + Mw = -mv' + Mw' \quad \text{——②}$$

②より

$$w' = \frac{m}{M}(v+v') + w$$

①へ代入

$$\frac{5}{6}mv^2 + \frac{1}{2}Mw^2 = \frac{5}{6}mv'^2 + \frac{M}{2}\cdot\left\{\frac{m}{M}(v+v') + w\right\}^2$$

$$= \frac{5}{6}mv'^2 + \frac{m^2}{2M}(v+v')^2 + mw(v+v') + \frac{1}{2}Mw^2$$

$$\frac{5}{6}v^2 = \frac{5}{6}v'^2 + \frac{m}{2M}(v+v')^2 + w(v+v')$$

$$\frac{5}{6}(v^2 - v'^2) = \frac{m}{2M}(v+v')^2 + w(v+v')$$

$$\frac{5}{6}(v - v') = \frac{m}{2M}(v+v') + w$$

$$\left(\frac{5}{6} + \frac{m}{2M}\right)v' = \left(\frac{5}{6} - \frac{m}{2M}\right)v - w \quad)\times 6M$$

$$(5M + 3m)v' = (5M - 3m)v - 6Mw$$

$$v' = \underline{\frac{(5M-3m)v - 6Mw}{5M+3m}}$$

2020 京大

Ⅲ

問2

$$v' = \frac{(5M-3m)v - 6Mw}{5M+3m} \times \frac{\frac{1}{M}}{\frac{1}{M}}$$

$$= \frac{\left(5-3\frac{m}{M}\right)v - 6w}{5+3\frac{m}{M}}$$

$$\fallingdotseq \frac{5v-6w}{5}$$

$$= v - \frac{6}{5}w$$

よって

$$a = \frac{6}{5}$$

このとき

$$\gamma = \frac{1}{3}(a+3)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{6}{5}+3\right)$$

$$= \frac{7}{5}$$