2019 京大

I

▷ア 万有引力の公式より

$$G\frac{Mm_A}{(R+a)^2}$$

▷ウ

$$G\frac{Mm_B}{(R-b)^2}$$

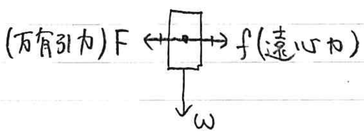
▷イ 遠心力の公式より

$$m_A(R+a)\omega^2$$

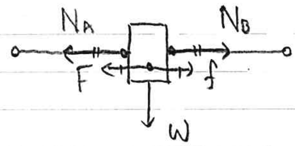
▷エ

$$m_B(R-b)\omega^2$$

▷オ 人工衛星Zが、小物体AとBを取り付ける前と同じ円軌道を、同じ角速度ωで動き続けるには、$N_A = N_B$でなくてはならない。



〈取り付ける前〉



〈取り付けた後〉

よって

$$c = 1$$

▷オを式で説明

小物体を取り付ける前の力のつり合いの式は

$$F = f.$$

小物体を取り付けた後の力のつり合いの式は

$$F + N_A = f + N_B$$

よって

$$N_A = N_B$$

つまり

$$c = 1$$

($F = G\frac{Mm_z}{R^2}$, $f = m_z R\omega^2$ は、代入しなくても求まる。)

▷カ 小物体の取付前の力のつり合い、および(i)(ii)式 と $c=1$ を利用

$$\begin{cases} G\dfrac{Mm_z}{R^2} = m_z R\omega^2 \\ G\dfrac{Mm_A}{(R+a)^2} + N_A = m_A(R+a)\omega^2 \\ G\dfrac{Mm_B}{(R-b)^2} = N_B + m_B(R-b)\omega^2 \\ N_A = N_B \end{cases}$$

2019 京大

I

▷カ つづき　与えられた近似を用いると

$$\begin{cases} \dfrac{GM}{R^2} = R\omega^2 \\ \dfrac{GMm_A}{R^2}\left(1-2\dfrac{a}{R}\right) + N_A = m_A(R+a)\omega^2 \\ \dfrac{GMm_B}{R^2}\left(1+2\dfrac{b}{R}\right) = N_B + m_B(R-b)\omega^2 \\ N_A = N_B \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_A R\omega^2\left(1-\dfrac{2a}{R}\right) + N_A = m_A(R+a)\omega^2 \\ m_B R\omega^2\left(1+\dfrac{2b}{R}\right) = N_B + m_B(R-b)\omega^2 \\ N_A = N_B \end{cases}$$

よって

$$N_A = 3m_A a\omega^2, \quad N_B = 3m_B b\omega^2$$

ゆえに、

$$3m_A a\omega^2 = 3m_B b\omega^2$$

∴

$$\frac{m_A}{m_B} = \frac{b}{a} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} \qquad \therefore \ \underline{k=-1}$$

▷キ　$N_A = 3m_A a\omega^2$ より

$$\frac{N_A}{a} = \underline{3m_A\omega^2}$$

▷ク　人工衛星Zの力のつり合い　　宇宙船Uの力のつり合い

$$G\frac{Mm_Z}{R^2} = m_Z\frac{V_0^2}{R} \qquad G\frac{Mm_U}{R^2} = m_U\frac{V_0^2}{R}$$

$$\underline{V_0 = \sqrt{\frac{GM}{R}}} \qquad \underline{V_0 = \sqrt{\frac{GM}{R}}}$$

どちらでも
求まる

2019 京大

I

▷ケ 人工衛星Zが角θだけ周回するのに要する時間をtとすると、

$$\theta_{[rad]} : t = 2\pi_{[rad]} : T_0$$

より

$$2\pi t = \theta T_0$$

$$t = \frac{\theta}{2\pi} T_0$$

であるから 人工衛星が一周より角θ分だけ短い距離を周回する時間 T_1 は

$$T_1 = T_0 - \frac{\theta}{2\pi} T_0$$

$$= \left(1 - \frac{\theta}{2\pi}\right) T_0$$

∴

$$\frac{T_1}{T_0} = 1 - \frac{\theta}{2\pi}$$

▷コ 半径Rの円軌道と、半長軸 $\frac{R+d}{2}$ の楕円軌道に対して、ケプラーの第3法則を適用すると

$$\frac{T_1^2}{\left(\frac{R+d}{2}\right)^3} = \frac{T_0^2}{R^3}$$

$$\left(\frac{2R}{R+d}\right)^3 = \left(\frac{T_0}{T_1}\right)^2$$

$$\left(\frac{2}{1+\frac{d}{R}}\right)^3 = \left(\frac{T_0}{T_1}\right)^2$$

$$\left(1+\frac{d}{R}\right)^3 = 8\left(\frac{T_1}{T_0}\right)^2$$

$$1+\frac{d}{R} = 2\left(\frac{T_1}{T_0}\right)^{2/3}$$

$$\frac{d}{R} = 2\left(\frac{T_1}{T_0}\right)^{2/3} - 1$$

2019 京大

I

▷サ

ケプラーの第2法則より

$$\frac{1}{2}dV_D = \frac{1}{2}RV_1 \iff V_D = \frac{R}{d}V_1$$

力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}\cancel{m_U}V_D^2 - \frac{GM\cancel{m_U}}{d} = \frac{1}{2}\cancel{m_U}V_1^2 - \frac{GM\cancel{m_U}}{R}$$

$$V_D^2 - \frac{2GM}{d} = V_1^2 - \frac{2GM}{R}$$

$$\frac{R^2}{d^2}V_1^2 - V_1^2 = \frac{2GM}{d} - \frac{2GM}{R}$$

$$\frac{R^2-d^2}{d^2}V_1^2 = 2GM\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{R}\right)$$

$$V_1^2 = \frac{d^2}{R^2-d^2}\cdot 2GM\frac{R-d}{Rd}$$

$\quad R^2-d^2=(R+d)(R-d)$

$$= \frac{2d}{R+d}\cdot\frac{GM}{R}$$

$$= \frac{2d}{R+d}\cdot V_0^2$$

$$\frac{V_1}{V_0} = \sqrt{\frac{2d}{R+d}} \;//$$

問1.

$\theta \ll \pi$ であるから、近似を利用して

$$\frac{d}{R} = 2\left(1-\frac{\theta}{2\pi}\right)^{2/3} - 1$$

$$\fallingdotseq 2\left(1-\frac{2}{3}\cdot\frac{\theta}{2\pi}\right) - 1$$

$$= 1 - \frac{2\theta}{3\pi}$$

これを(サ)に適用して、さらに近似をすると、

$$\frac{V_1}{V_0} = \sqrt{\frac{2\cdot\frac{d}{R}}{1+\frac{d}{R}}}$$

$$= \sqrt{\frac{2\cdot\left(1-\frac{2\theta}{3\pi}\right)}{1+\left(1-\frac{2\theta}{3\pi}\right)}}$$

$$= \sqrt{\frac{2\left(1-\frac{2\theta}{3\pi}\right)}{2-\frac{2\theta}{3\pi}}}$$

2019 京大

I 問1つづき

$$\frac{V_1}{V_0} = \sqrt{\frac{2\left(1-\frac{2\theta}{3\pi}\right)}{2-\frac{2\theta}{3\pi}}}$$

$$= \sqrt{\frac{1-\frac{2\theta}{3\pi}}{1-\frac{\theta}{3\pi}}}$$

$$= \left(1-\frac{2\theta}{3\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(1-\frac{\theta}{3\pi}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\fallingdotseq \left(1-\frac{\theta}{3\pi}\right)\left(1+\frac{\theta}{6\pi}\right)$$

$$= 1 + \frac{\theta}{6\pi} - \frac{\theta}{3\pi} + \delta$$ （δは微小量なので0とする）

$$\fallingdotseq 1 - \frac{\theta}{6\pi}$$

∴

$$V_1 = \left(1-\frac{\theta}{6\pi}\right)V_0$$

$$\Delta V = V_1 - V_0$$

$$= \left(1-\frac{\theta}{6\pi}\right)V_0 - V_0$$

$$= -\frac{\theta}{6\pi}V_0$$ //

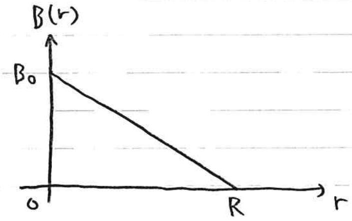
∴

$$\frac{\Delta V}{\theta V_0} = -\frac{1}{6\pi}$$ //

2019 京大

II (1)

▶イ　図1を活用して B-r グラフを描くと



これによって

$$B(r) = -\frac{B_0}{R}r + B_0$$

$$= B_0\left(1-\frac{r}{R}\right)$$

▶ロ　ローレンツ力の公式より、ローレンツ力の大きさは

$$|F| = evB$$

$$= erwB_0\left(1-\frac{r}{R}\right)$$

$v = rw,\ B = B_0\left(1-\frac{r}{R}\right)$

▶ハ　電場による力と、ローレンツ力とがつり合っているので

eE　$erwB_0\left(1-\frac{r}{R}\right)$

$$eE = erwB_0\left(1-\frac{r}{R}\right)$$

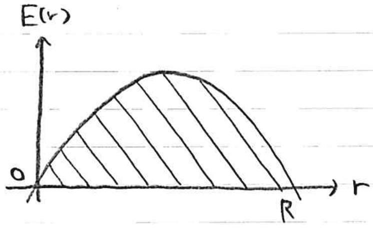
$$E = rwB_0\left(1-\frac{r}{R}\right)$$

▶ニ

$$E = wB_0 r\left(1-\frac{r}{R}\right)$$

$$= \frac{wB_0}{R} r(R-r)$$

となるので、E-r グラフを描くと



この面積が導体棒の両端間の電位差になるので

$$面積 = \frac{wB_0}{R}\cdot\frac{1}{6}R^3$$

$$= \frac{1}{6}wB_0R^2$$

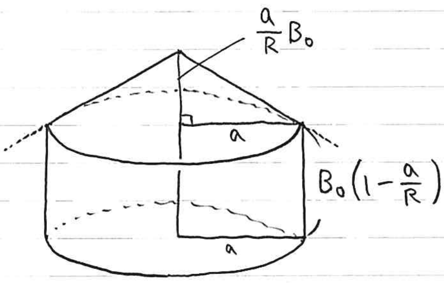
2019 京大

Ⅱ (2)

ホ　ΔS は微小なので、ΔS 内の $B(r)$ は一定と見做せる

$$\Delta\Phi = B(r)\cdot\Delta S$$
$$= \left(1-\frac{r}{R}\right)B_0\Delta S$$

問1　問題文に「Φ_R は円内の $\Delta\Phi$ の総和であり、$\Phi_R = \frac{1}{3}\pi R^2 B_0$ となる」とあるが、これは、$B(r)$ を高さと見做したときの立体の体積として求めることができることを意味している



よって

$$\phi_a = \pi a^2 B_0\left(1-\frac{a}{R}\right) + \frac{1}{3}\pi a^2\cdot\frac{a}{R}B_0$$
$$= \pi a^2 B_0 - \frac{\pi a^3 B_0}{R} + \frac{\pi a^3 B_0}{3R}$$
$$= \pi a^2 B_0 - \frac{2\pi a^3 B_0}{3R}$$
$$= \pi a^2 B_0\left(1-\frac{2a}{3R}\right)$$

問1別　$\Delta S \longmapsto dS = r\,dr\,d\theta$ として r と θ について二重積分

$$\phi_a = \int_0^{2\pi}\int_0^a \left(1-\frac{r}{R}\right)B_0\cdot r\,dr\,d\theta$$
$$= 2\pi B_0\int_0^a\left(r-\frac{r^2}{R}\right)dr$$
$$= 2\pi B_0\left[\frac{1}{2}r^2-\frac{1}{3R}r^3\right]_0^a$$
$$= 2\pi B_0\left(\frac{a^2}{2}-\frac{a^3}{3R}\right)$$
$$= \pi B_0 a^2\left(1-\frac{2a}{3R}\right)$$

2019 京大

II (3)

▷ヘ　半径 a の円周上で生じる誘導起電力の大きさは

$$|V_a| = \frac{\Delta \Phi_a}{\Delta t}$$

$$= \frac{\pi a^2 B_0}{t}\left(1 - \frac{2a}{3R}\right)$$

$\downarrow$ $B_0 = kt$ として

$$= \pi a^2 k\left(1 - \frac{2a}{3R}\right)$$

電子は、半径 a を一定に保ったまま円運動しているので、
V, E, d がいずれも一定となり、$V_a = Ed$ が使える
$d = 2\pi a$ と考えて、

$$|E| = \frac{\pi a^2 k}{2\pi a}\left(1 - \frac{2a}{3R}\right)$$

$$= \underline{\frac{ak}{2}\left(1 - \frac{2a}{3R}\right)} \,//$$

▷ト　電子の、円軌道に沿った方向の加速度を A とすると、
運動方程式は、

$$mA = eE$$

$$mA = \frac{ake}{2}\left(1 - \frac{2a}{3R}\right)$$

$$A = \frac{ake}{2m}\left(1 - \frac{2a}{3R}\right)$$

よって、$v_0 = 0$ であるとき、

$$v = v_0 + at$$

$$= \underline{\frac{ake}{2m}\left(1 - \frac{2a}{3R}\right)t} \,//$$

この式は半径 a を保ったままで
電子が加速していったときの速さ
を表す式であって、遠心力を考慮
しているか、していないかには言及
していない。
なので、運動が半径 a で固定
されるとしたら、という仮定の上での
式となっている。

Ⅱ(3)
問2　遠心力を考慮しても、半径が a のままであるためには、
遠心力とローレンツ力がつり合わなければならない。
よって

$$m\frac{v^2}{a} = evB$$

$$B = B_0\left(1-\frac{a}{R}\right) = kt\left(1-\frac{a}{R}\right)$$

$$= evk\left(1-\frac{a}{R}\right)t$$

$$v = \frac{ake}{m}\left(1-\frac{a}{R}\right)t$$

この式は遠心力とローレンツ力がつり合っている瞬間の速さを表す式であって"等速"円運動の運動方程式ではない。

となる。
この値と(ト)は一致するので、

$$\frac{ake}{2m}\left(1-\frac{2a}{3R}\right)t = \frac{ake}{m}\left(1-\frac{a}{R}\right)t$$

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{2a}{3R}\right) = 1-\frac{a}{R}$$

$$\frac{1}{2}-\frac{a}{3R} = 1-\frac{a}{R}$$

$$\frac{2a}{3R} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a}{R} = \underline{\frac{3}{4}}$$

2019 京大

III

▷あ　屈折率 n の薄膜に入射したので、

$$\underline{\frac{\lambda}{n}} \,//$$

▷い　入射光の電場の x 成分は $z<0$ において、

$$E_I = E \sin 2\pi\left(ft - \frac{z}{\lambda}\right)$$

で与えられているので、

① 反射光の振幅 p 倍
② 反射面で位相が逆転
③ 反射波の進行方向は元の逆向き

であることから

$$E_{R_0} = \underbrace{-}_{②}\ \underbrace{p}_{①} E \sin 2\pi\left(ft \underbrace{+}_{③} \frac{z}{\lambda}\right) \,//$$

▷う　同様に、透過光は

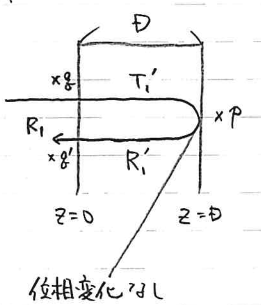
① 透過光の振幅 q 倍
② 膜内波長 $\frac{\lambda}{n}$

であることから

$$E_{T_1'} = \underbrace{q}_{①} E \sin 2\pi\left(ft - \underbrace{\frac{z}{\frac{\lambda}{n}}}_{②}\right)$$

$$= \underline{qE \sin 2\pi\left(ft - \frac{nz}{\lambda}\right)} \,//$$

▷えお、



同様に、

① $z=0$ で透過して振幅 q 倍
② $z=D$ で反射して振幅 p 倍
③ $z=0$ で再び透過して、振幅 q' 倍
④ 反射波の進行方向は元の逆向き
⑤ 膜内波長 $\frac{\lambda}{n}$
⑥ 膜内での波の通過キョリ 往復 $2D$

であることから

$$E_{R_1} = \underbrace{q\,p\,q'}_{①②③} E \sin 2\pi\left\{\left(ft \underbrace{+}_{④} \frac{z}{\lambda}\right) - \underbrace{\frac{2D}{\frac{\lambda}{n}}}_{⑤⑥}\right\}$$

$$= pqq'E \sin 2\pi\left\{\left(ft + \frac{z}{\lambda}\right) - \frac{2nD}{\lambda}\right\}$$

$$= \underbrace{\underline{pqq'E}}_{(え)} \sin\left\{2\pi\left(ft + \frac{z}{\lambda}\right) \underbrace{\underline{- \frac{4\pi nD}{\lambda}}}_{(お)}\right\}$$

2019 京大

Ⅲ

問1　R_0光とR_1光の電場を重ね合わせると.

$$-pE\sin 2\pi\left(ft+\frac{z}{\lambda}\right) + pgg'E\sin\left\{2\pi\left(ft+\frac{z}{\lambda}\right)-\frac{4\pi nD}{\lambda}\right\}$$

ここで

$$\theta \equiv 2\pi\left(ft+\frac{z}{\lambda}\right)$$

としておくと.

$$-pE\sin\theta + pgg'E\sin(\theta+\phi)$$
$$= -pE\sin\theta + pE\cdot gg'(\sin\theta\cos\phi+\cos\theta\sin\phi)$$
$$= pE\left\{\sin\theta(gg'\cos\phi-1) + gg'\cos\theta\sin\phi\right\}$$
$$= pE\left\{(gg'\cos\phi-1)\cdot\sin\theta + gg'\sin\phi\cdot\cos\theta\right\}$$

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\beta)$$

$$= pE\sqrt{(gg'\cos\phi-1)^2+(gg'\sin\phi)^2}\cdot\sin(\theta+\beta)$$

これを2乗すると

$$p^2E^2\left\{(gg'\cos\phi-1)^2+(gg'\sin\phi)^2\right\}\sin^2(\theta+\beta)$$
$$= p^2E^2\left\{\left(g^2g'^2\cos^2\phi-2gg'\cos\phi+1\right)+\left(g^2g'^2\sin^2\phi\right)\right\}\sin^2(\theta+\beta)$$
$$= p^2E^2\left(g^2g'^2-2gg'\cos\phi+1\right)\sin^2(\theta+\beta)$$

であるから. 光の強度(振幅の2乗. A^2)部分は.

$$\underline{A^2 = p^2E^2\left(g^2g'^2-2gg'\cos\phi-1\right)}$$

問1　光の強度が最大になるのは. $\cos\phi=-1$ となるときである.
よって

$$\phi = -\frac{4\pi nD}{\lambda} = (2m-1)\pi$$

(問題文で指定されている)
$(m=1,2,3\cdots)$

となるときであるが. $\cos\phi=\cos(-\phi)$ より.

$$\frac{4\pi nD}{\lambda} = (2m-1)\pi$$

でも成り立つことから.

$$\underline{D = \frac{2m-1}{4n}\lambda}$$

この式は

$$2nD = \left(m-\frac{1}{2}\right)\lambda \quad (m=1,2,3\cdots)$$

と同義である

2019 京大

Ⅲ

▶き　このとき光の強度は

$$A^2 = p^2E^2(gg^2g'^2 + 2gg' + 1)$$
$$= (1+gg')^2 p^2E^2$$

であるから、振幅は

$$A = \underline{(1+gg')pE}$$

▶く・こ　干渉条件より

$$\begin{cases} \text{強め合うとき} & 2nD = m\lambda \iff D = \underline{\dfrac{m}{2n}\lambda} \ (\text{く}) \\ \text{弱め合うとき} & 2nD = \left(m-\dfrac{1}{2}\right)\lambda \iff D = \underline{\dfrac{2m-1}{4n}\lambda} \ (\text{こ}) \end{cases}$$

▶け・さ　T_1光の振幅が $gg'E$、
T_2 光の振幅が $p^2gg'E$
であるから

$$\begin{cases} \text{強め合うとき} & gg'E + p^2gg'E = \underline{(1+p^2)gg'E} \ (\text{け}) \\ \text{弱め合うとき} & gg'E - p^2gg'E = \underline{(1-p^2)gg'E} \ (\text{さ}) \end{cases}$$

問2　T_1光の振幅が $gg'E$
T_2光の振幅が $p^2gg'E$
T_3光の振幅が $p^4gg'E$
T_4光の振幅が $p^6gg'E$
⋮
と続くので、
薄膜の厚さDが λ の $\boxed{\text{く}}$ 倍のとき、
つまり強め合うときは

$$A = gg'E + p^2gg'E + p^4gg'E + p^6gg'E + \cdots$$
$$= (1+p^2+p^4+p^6+\cdots)gg'E$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}(p^2)^k \cdot gg'E$$
$$= \frac{1}{1-p^2}gg'E$$

$p^2 + gg' = 1 \iff gg' = 1-p^2$ より

$$= \frac{1-p^2}{1-p^2}E = E$$

よって光の強度は $\underline{A^2 = E^2}$

2019 京大

III

問2 つづき

薄膜の厚さDがλの$\boxed{こ}$倍のとき、
つまり弱め合うときは、
T_1光とT_2光が逆位相、
T_2光とT_3光が逆位相、
T_3光とT_4光が逆位相
⋮
となれば良いので、

$$A = gg'E - p^2 gg'E + p^4 gg'E - p^6 gg'E + \cdots$$
$$= (1 - p^2 + p^4 - p^6 + \cdots)\, gg'E$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-p^2)^k \cdot gg'E$$
$$= \frac{1}{1+p^2} \cdot gg'E$$

同様に、$p^2 + gg' = 1 \iff gg' = 1 - p^2$ より

$$= \frac{1-p^2}{1+p^2} E$$

よって、

$$A^2 = \left(\frac{1-p^2}{1+p^2}\right)^2 E^2$$

問3 特定の波長の光を選択して抽出するには、対象となる波長以外の部分が0に近ければ良いので、

薄膜X を用いるのが良い。

このとき弱め合う光の強度が0に近ければ良いので、
薄膜Xは pが1に近い 値を持つものを用いると良い。