2018 京大

I (1)

▷ア　近似的に等速度運動となることから解くと、

$\Delta v = 0$ として、

$$m \times 0 = mg - kv_f$$

$$v_f = \frac{mg}{k}$$

重力と抵抗力がつり合う条件から解くと、

$$mg = kv_f$$

$$v_f = \frac{mg}{k}$$

▷イ　$v = v_f + \bar{v}$ より速度 v の変化量は、

$$\Delta v = \Delta(v_f + \bar{v})$$

↓ v_f は定数であるから、

$$\Delta v = \Delta \bar{v}$$

よって

$$m\frac{\Delta v}{\Delta t} = k(v_f - v)$$

$$\Leftrightarrow m\frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = -k\bar{v}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = -\frac{k}{m}\bar{v} = -\frac{\bar{v}}{\frac{m}{k}}$$

▷ウ　$\tau_1 = \frac{m}{k}$ とすると、

$v_f = \frac{mg}{k}$ より

$$= g\tau_1$$

▷エ　傾き $= \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = -\frac{\bar{v}}{m/k}$ において、

$\bar{v}$ が小さくなるほど、傾きは小さくなる。 ⟶ ①×

$\tau_1 = \frac{m}{k}$ は一定なので、どの運動も同程度の時間で終端速度に達する ⟶ ②④× よって ③

2018 京大

I (2)

▶オ アと同様に、十分時間が経過したとき、近似的に $\Delta v = 0$ となるとして、

$$m \times 0 = mg - cv_t^2$$
$$mg = cv_t^2$$
$$v_t = \sqrt{\frac{mg}{c}}$$

▶カ

$$m\frac{\Delta v}{\Delta t} = mg - cv^2$$

イと同様に、$v = v_t + \bar{v}$ より
$\Delta v = \Delta(v_t + \bar{v})$
$= \Delta\bar{v}$ であるから。

$$m\frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t} = mg - cv^2$$
$$\frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t} = g - \frac{c}{m}v^2$$
$$= g - \frac{c}{m}(v_t + \bar{v})^2$$
$$= g - \frac{c}{m}v_t^2\left(1 + \frac{\bar{v}}{v_t}\right)^2$$
$$\fallingdotseq g - \frac{c}{m}v_t^2\left(1 + \frac{2\bar{v}}{v_t}\right)$$

近似

$$= g - \frac{c}{m}\left(v_t^2 + 2\bar{v}v_t\right)$$
$$= g - \frac{c}{m}\left(\frac{mg}{c} + 2\bar{v}\sqrt{\frac{mg}{c}}\right)$$
$$= -2\bar{v}\sqrt{\frac{cg}{m}} = -\frac{\bar{v}}{\tau_2}$$ とすると

$$\tau_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{cg}}$$

(3)

	$m_1 = 1.0$ kg				$m_2 = 2.0$ kg			
時間	3.0	4.0	5.0	6.0	3.0	4.0	5.0	6.0
落下きょり	15.0	20.8	26.6	32.4	19.8	28.0	36.2	44.4
		+5.8	+5.8	+5.8		+8.2	+8.2	+8.2

表より、

$$v_1 = 5.8 \text{ m/s} \quad (キ)$$

$$v_2 = 8.2 \text{ m/s} \quad (ク)$$ である。

2018 京大

I 問1

粘性抵抗 $v_f = \frac{mg}{k}$; mが2倍になると v_fも2倍

慣性抵抗 $v_t = \sqrt{\frac{mg}{c}}$: mが2倍になると v_tは$\sqrt{2}$倍

いま、

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{8.2}{5.8} \fallingdotseq 1.4$$

であるから物体は慣性抵抗をうけながら運動していると考えられる。

ケ

$$v_t = \sqrt{\frac{mg}{c}} = 5.8$$

であるから

$$\tau_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{cg}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{mg}{c}} \cdot \frac{1}{g}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 5.8 \cdot \frac{1}{9.8}$$

$$\fallingdotseq \underline{0.3\,s}$$

コ

問題文の表より 3.0s以降は終端速度に達している。

→ ①③⑥ ×

$$\tau_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{cg}} = \frac{1}{2} v_t \cdot \frac{1}{g}$$ より。

mが2倍になると、

v_tは$\sqrt{2}$倍になるので、

τ_2も$\sqrt{2}$倍になる。

よって

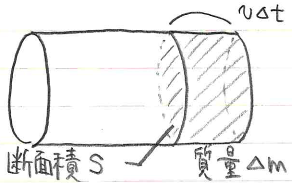
質量が大きいほど、終端速度は速く、緩和時間も大きくなる

→ ②③⑤ ×

<u>以上より ④</u>

I (4)

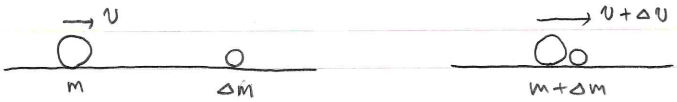
▷サ



水のかたまりは Δt 間に $v\Delta t$ だけ進むので、底面積 S, 高さ $v\Delta t$ の円柱の体積 $Sv\Delta t$ から、

$$\underline{\Delta m = \rho S v \Delta t}$$

▷シ



質量 m, 速度 v の物体が、質量 Δm の物体と衝突し、
一体化して、速度 $v+\Delta v$ になったと考える

$$mv = (m+\Delta m)(v+\Delta v)$$
$$= mv + m\Delta v + \Delta m \cdot v + \underbrace{\Delta m \cdot \Delta v}_{\Delta の2次は無視}$$
$$0 = m\Delta v + \Delta m \cdot v$$

$\Delta m = \rho S v \Delta t$ であるから

$$= m\Delta v + \rho S v^2 \Delta t$$
$$m\Delta v = -\rho S v^2 \Delta t$$
$$\underline{m\frac{\Delta v}{\Delta t} = -\rho S v^2}$$

2018 京大

II (1)

▶ イ　電子は、x軸方向には等速運動をしているので、

$$t = \frac{l}{v_0}$$

▶ ロ　y軸方向の運動方程式より、

$$ma = eE = e\frac{V}{d}$$

$$a = \frac{eV}{md}$$

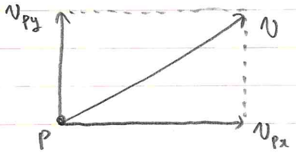
であるから、等加速度運動の公式に代入し、

$$y = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{eV}{md}\cdot\frac{l^2}{v_0^2}$$

▶ ハ　点Pでの速度のy成分は

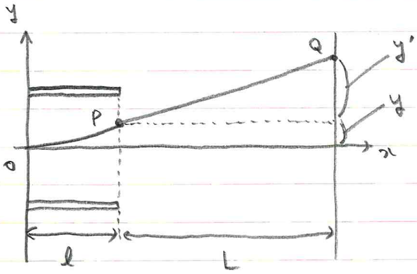
$$v_{py} = at = \frac{eVl}{mdv_0}$$

であり、x成分は $v_{px} = v_0$ であるから、



$$v = \sqrt{v_{px}^2 + v_{py}^2} = \sqrt{v_0^2 + \left(\frac{eVl}{mdv_0}\right)^2}$$

▶ ニ



図のように y' をおくと、点Pでの速度成分より

$L : y' = v_0 : at$　と書ける

よって

$$v_0 y' = Lat$$

$$y' = \frac{L}{v_0}\cdot\frac{eVl}{mdv_0} = \frac{LeVl}{mdv_0^2}$$

ゆえに

$$y + y' = \frac{eVl^2}{2mdv_0^2} + \frac{LeVl}{mdv_0^2} = \frac{eVl(l+2L)}{2mdv_0^2}$$

2018 京大

II (1)

▷ホ 「電子が領域Iに侵入する前に、あらかじめ電圧 $V_p(>0)$ で速さ0から v_0 まで加速され」とあるので、エネルギー保存則より、

$$eV_p = \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$v_0^2 = \frac{2eV_p}{m}$$

であるから、

$$y + y' = \frac{eVl(l+2L)}{2mdv_0^2}$$

$$= \frac{eVl(l+2L)}{2md} \cdot \frac{m}{2eV_p}$$

$$= \underline{\frac{Vl(l+2L)}{4dV_p}}$$

(2)

▷ヘ ローレンツ力は仕事をしないので、電場がした仕事から

$$W = K$$

$$e\frac{V}{d} \times y = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v = \underline{\sqrt{\frac{2eVy}{md}}}$$

▷ト 点Uにおける速度が

$$v = v_x = \frac{2V}{Bd}$$

であるから、

$$\frac{2V}{Bd} = \sqrt{\frac{2eVy_U}{md}}$$

$$\frac{4V^2}{B^2d^2} = \frac{2eVy_U}{md}$$

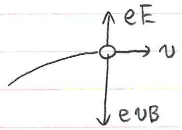
$$y_U = \frac{4V^2}{B^2d^2} \cdot \frac{md}{2eV}$$

$$= \underline{\frac{2mV}{eB^2d}}$$

2018 京大

II (2)

▷チ　点Uにおける運動方程式より



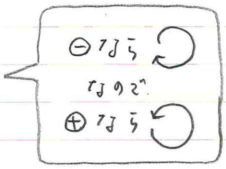
$$ma = eE - evB$$

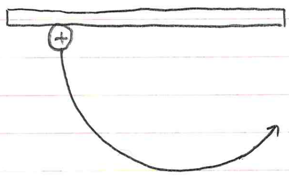
$$= e\frac{V}{d} - e\frac{2V}{Bd}B$$

$$= -\frac{eV}{d}$$

$$a = -\frac{eV}{md}$$

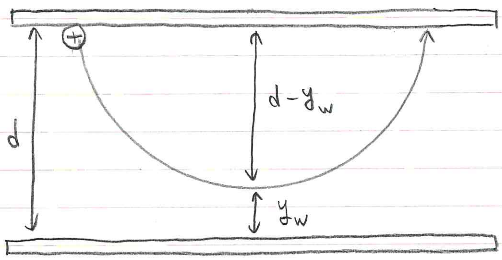
▷リ　電子の運動が時計回りなので、
陽イオンの運動は反時計回りだと判断できる。





よって
① x軸の正
の向きに移動する。

▷ヌ



(ト)より、電子の円軌道半径と陽イオンの円軌道半径はそれぞれ

$$y_U = \frac{2mV}{eB^2d}$$

$$d - y_W = \frac{2MV}{eB^2d}$$

いま、$M > m$ が成り立つので、

$$d - y_W = \frac{2MV}{eB^2d} > \frac{2mV}{eB^2d} = y_U$$

∴

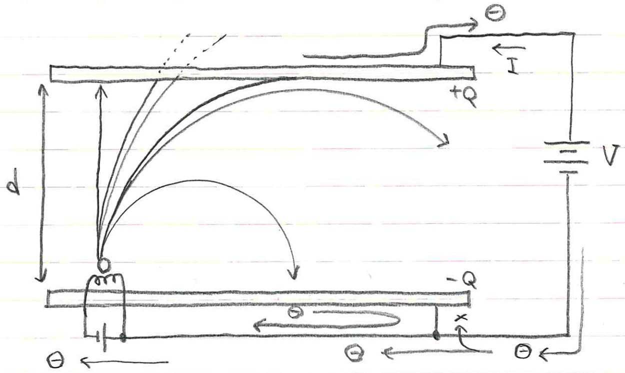
$$y_U < d - y_W \quad ①$$

No. 8

Date 2020. 11. 27

2018 京大

II (3)



$y_0 = \dfrac{2mV}{eB^2d} > d$ のとき、回路に I_0 が流れる。

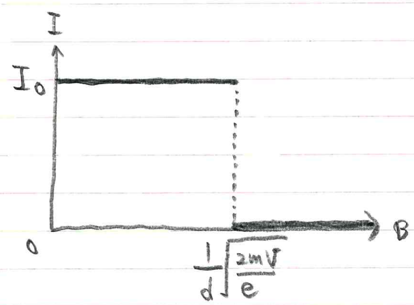
$y_0 < d$ のとき、電子は − 極板に戻り、回収される

$y_0 = d$ のとき、つまり、$\dfrac{2mV}{eB^2d} = d$

$B = \sqrt{\dfrac{2mV}{ed^2}} = \dfrac{1}{d}\sqrt{\dfrac{2mV}{e}}$ のときが

回路に電流が流れるための最大の B となるので、

I-B グラフは次のようになる。

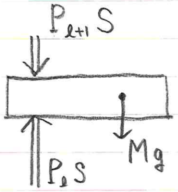


2018 京大

III (A)

▷あ　質量 m の分子が $1m^3$ あたり n_ℓ(個) あるが、いま 考えている領域の体積は $S\Delta z$ と表すことができるので、小領域中にある気体の総質量は、
$(M=)$ $\underline{m n_\ell S\Delta z}$ // となる。

▷い



小領域にはたらく鉛直方向の力のつり合いの式は、

$$P_{\ell+1}S + Mg = P_\ell S$$

↓ $M = mn_\ell S\Delta z$ として

$$P_{\ell+1} + mn_\ell \Delta z \cdot g = P_\ell$$

$$P_{\ell+1} - P_\ell = \underline{-mn_\ell \Delta z \cdot g} \;//$$

▷う　(補) $PV = nRT$ (nはmol数) より

$$PV = \frac{m}{M}RT \quad (mは気体の総質量,\ M = mN_0)$$

分子1つの質量
アボガドロ数 6×10^{23} コ

$$P_\ell \cdot S\Delta z = \frac{mn_\ell S\Delta z}{mN_0}RT$$

$$P_\ell = \frac{n_\ell}{N_0}RT$$

$$= n_\ell \frac{R}{N_0}T$$

↓ $\frac{R}{N_0} = k$ とすると

$$P_\ell = n_\ell kT \quad \text{——— (2)}$$

が導出される。本問では、この加工された状態方程式を用いて解く。

$$P_{\ell+1} - P_\ell = -mn_\ell g\Delta z$$

↓ (2)より $n_\ell = \frac{P_\ell}{kT}$

$$= -m\frac{P_\ell}{kT}g\Delta z$$

$$= \underline{-\frac{mg}{kT}} \times \Delta z P_\ell \;//$$

2018 京大

Ⅲ(A)

▷え　$P_\ell = P(z)$, $P_{\ell+1} = P(z+\Delta z)$ とすると
(3)式より

$$P(z+\Delta z) - P(z) = -\frac{mg}{kT}\Delta z P(z)$$

$$\frac{P(z+\Delta z) - P(z)}{\Delta z} = -\frac{mg}{kT}P(z)$$

この式と(4)式を比較すると

$$a = \frac{mg}{kT}$$

であると分かるので、$f(z) = f(0)e^{-az}$ より

$$P(z) = P(0)e^{-\frac{mg}{kT}z}$$

$$= P_0 \exp\left(-\frac{mg}{kT}z\right)$$

$P(0) = P_0$ とする。
($e^{◎} = \exp ◎$ と表記する)

▷お

$$n_\ell = \frac{P_\ell}{kT}$$ より

$$n(z) = \frac{P(z)}{kT}$$ として(え)を代入

$$n(z) = \frac{P_0}{kT}\exp\left(-\frac{mg}{kT}z\right)$$

問1

$$U = \sum_{\ell=0}^{\infty} mg z_\ell n_\ell S\Delta z$$

$z_\ell = \ell\Delta z$, $z_0 = 0$,

$$n_\ell = \frac{P_0}{kT}\exp\left(-\frac{mg}{kT}\ell\Delta z\right)$$

$$= \sum_{\ell=1}^{\infty} mg\cdot\ell\Delta z\cdot\frac{P_0}{kT}\exp\left(-\frac{mg}{kT}\cdot\ell\Delta z\right)S\Delta z$$

$\ell=0$ のとき $U_0=0$ なので Σ のスタートが $\ell=1$ からにできる

$$= mg\cdot\Delta z\cdot\frac{P_0}{kT}\cdot S\Delta z\sum_{\ell=1}^{\infty}\ell\exp\left(-\frac{mg}{kT}\ell\Delta z\right)$$

$$\sum_{\ell=1}^{\infty}\ell e^{-\ell\alpha} \doteqdot \frac{1}{\alpha^2}$$

$\alpha = \frac{mg\Delta z}{kT}$ とする

$$\doteqdot \frac{mg\Delta z}{kT}\cdot P_0 S\Delta z\cdot\frac{1}{\left(\frac{mg\Delta z}{kT}\right)^2}$$

$$= P_0 S\Delta z\cdot\frac{1}{\left(\frac{mg\Delta z}{kT}\right)}$$

$$= P_0 S\Delta z\cdot\frac{kT}{mg\Delta z} = \frac{P_0 S}{mg}kT$$

2018 京大

Ⅲ(B)

▷か　底面に加わる力は Nコの気体分子の重さと等しいので、
→ 底面に乗る気体全体の重さ

$$P_0 S = N mg$$

$$N = \frac{P_0 S}{mg}$$

▷き　単原子分子 1コの運動エネルギーは $T = \mathrm{const}$ として

$$U = \frac{3}{2} kT$$

であるから分子 Nコの総和は、

$$U = \frac{3}{2} kT \times N$$

▷く　問1より

$$U = \frac{P_0 S}{mg} kT$$

であるから 式(7)[か] を適用して

$$U = NkT$$

▷け　式(8)[き] と 式(9)[く] より

$$E = \frac{3}{2} NkT + NkT$$

$$= \frac{5}{2} NkT$$

▷こ　円筒内の気体分子の力学的エネルギーの総和(内部エネルギー)は
気体分子数 N，気体1粒子あたりの比熱 c，温度変化 ΔT を用いて

$$E = Nc\Delta T$$

と書けるので

$$\frac{5}{2} Nk\Delta T = Nc\Delta T$$

$$c = \frac{5}{2} k$$

▷さ　重力場がないとき 式(8)[き] より 比熱は

$$c = \frac{3}{2} k$$

となるので [こ] と比較すると 重力場があるときの方が比熱が
① 大きい

2018 京大

III (c)

▷し　おもりにはたらく鉛直方向の力のつり合いより

$$Mg = P(h)S$$
$$P(h) = \frac{Mg}{S}$$

▷す.　静力学平衡によって求めた圧力(式(5))は

$$P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{mg}{kT}\cdot z\right)$$

力のつり合いによって求めた圧力(式(11))は

$$P(h) = \frac{Mg}{S}$$

であるから 式(5)において $z=h$ とすると，$P_0 = P_B$ となり

$$P_B \exp\left(-\frac{mg}{kT}\cdot h\right) = \frac{Mg}{S}$$
$$\exp\left(-\frac{mg}{kT}\cdot h\right) = \frac{Mg}{P_B S}$$

両辺 対数とると

$$-\frac{mg}{kT}\cdot h = \ln\left(\frac{Mg}{P_B S}\right)$$

(ただし $\log_e x = \ln x$ と書く)

$$m = -\frac{kT}{gh}\cdot\ln\left(\frac{Mg}{P_B S}\right)$$
$$= \frac{kT}{gh}\ln\left(\frac{P_B S}{Mg}\right)$$

▷せ.　(す)に各値代入すると

$$m = \frac{1.4\times10^{-23}\cdot300}{9.8\cdot30}\cdot\ln\left(\frac{1005}{1000}\right)$$

$\ln\left(1+\frac{5}{1000}\right) \fallingdotseq \frac{5}{1000}$

$$= \frac{1.4\times10^{-22}}{9.8}\cdot\frac{5}{1000}$$
$$= \frac{14}{98}\times10^{-22}\cdot5\times10^{-3}$$
$$= \frac{70}{98}\times10^{-25}$$
$$= \frac{5}{7}\times10^{-25}$$
$$\fallingdotseq 0.\dot{7}1428\dot{5}\times10^{-25}$$
$$\fallingdotseq 7\times10^{-26}\ \mathrm{kg}$$