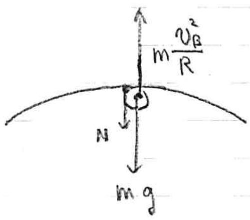
2020 阪大

〔1〕問1　点Bを高さの基準として、力学的エネルギー保存則をたてると

$$mgh = \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$v_B = \sqrt{2gh}$$

問2



点Bにおける力のつり合いの式は

$$m\frac{v_B^2}{R} = N + mg$$

小物体が円周から離れることなく運動するためには、$N \geqq 0$ でなければならない

つまり

$$m\frac{v_B^2}{R} \geqq mg \quad (遠心力 \geqq 重力)$$

でなければならない。ここに $v_B = \sqrt{2gh}$ を代入すると

$$m\frac{2gh}{R} \geqq mg$$

$$h \geqq \frac{R}{2}$$

であるから、hの最小値 h_0 は等号成立のとき

つまり $h_0 = \frac{R}{2}$ である

問3　2つの物体は、それぞれ自由落下と、水平投射運動となる。よって、両者の落下時間は等しいので、(あ)

問4　分裂直前の点Dでの速度をVとすると、点Cでの速度の水平成分と等しいので

$$V = v_C \cos\theta$$

また、点Dでの分裂前後の運動量保存則より

$$mV = 0 + \frac{3}{4}m v_D$$

よって

$$v_C \cos\theta = \frac{3}{4}v_D$$

$$v_D = \frac{4}{3}v_C \cos\theta$$

問5　軽い物体は、分裂後、速度が0になるので、自由落下を行う。

よって

$$\frac{L}{2}$$

2020 阪大

[1] 問6

$$V = \frac{3}{4} v_0 \quad より$$

$$v_0 = \frac{4}{3} V \quad であるから$$

点Cから点Dまでに要する時間をtとすると
点Dから地面までの落下に要する時間もtである

点Cにおける速度の水平成分と分裂前の点Dにおける速度がともにVであるから

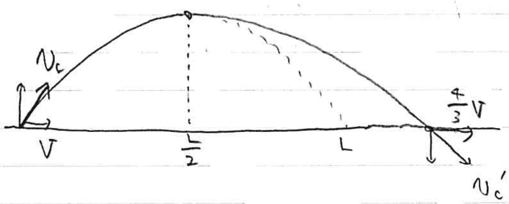
$$L' = Vt + \frac{4}{3}Vt$$

$$\downarrow \quad Vt = \frac{L}{2}$$

$$= \frac{L}{2} + \frac{4}{3} \cdot \frac{L}{2}$$

$$= \underline{\frac{7}{6}L}$$

問7



水平面に落下した直後の速度の水平成分は v_0 と等しいので点Eにおける運動量は

$$P_E = m \cdot \frac{4}{3}V$$

$$= \frac{4}{3} m v_c \cos\theta$$

i, 運動量の変化と力積の関係より

$$0 - \frac{4}{3} m v_c \cos\theta = F \Delta t$$

$$= -\mu m g t_s \quad F = -\mu mg$$

$$t_s = \underline{\frac{4 v_c \cos\theta}{3 \mu g}}$$

ii, 等加速度運動の公式より

$$v = v_0 + at$$

$$0 = \frac{4}{3} v_c \cos\theta - \mu g t_s$$

$ma = F$ より
$ma = -\mu mg$
$a = -\mu g$

$$\mu g t_s = \frac{4}{3} v_c \cos\theta$$

$$t_s = \underline{\frac{4 v_c \cos\theta}{3 \mu g}}$$

2020 阪大

〔1〕問8　時刻 t を x を用いて表すため、等加速度運動の公式を用いる

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad \text{より}$$

$$a = -\mu g$$
$$v_0 = \frac{4}{3} v_c \cos\theta$$

$$= \frac{4}{3} v_c t \cos\theta - \frac{1}{2} \mu g t^2$$

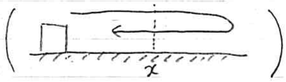
$$\frac{1}{2} \mu g t^2 - \frac{4}{3} v_c \cos\theta \cdot t + x = 0$$

$$\mu g t^2 - \frac{8}{3} v_c \cos\theta \cdot t + 2x = 0$$

解の公式により

$$t = \frac{\frac{4}{3} v_c \cos\theta - \sqrt{\frac{16}{9} v_c^2 \cos^2\theta - 2\mu g x}}{\mu g}$$

（+は $a=-\mu g$ で、x に再び戻ったときを示すので不適）



$$= \frac{1}{\mu g} \left(\frac{4}{3} v_c \cos\theta - \frac{4}{3} v_c \cos\theta \sqrt{1 - \frac{9 \cdot 2\mu g x}{16 v_c^2 \cos^2\theta}} \right)$$

$$= \underline{\frac{4 v_c \cos\theta}{3\mu g} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{9\mu g x}{8 v_c^2 \cos^2\theta}} \right)}$$

2020 阪大

(1) 問9　最終的な力学的エネルギーは 0 であるから、点Aにおける位置エネルギーと、小物体の内部に仕込まれているバネの弾性エネルギーの和を求めれば良い

点Aにおける位置エネルギー(=点Cにおける運動エネルギー)をE_1とすると

$$E_1 = mg(2R+h) = \frac{1}{2}m v_C^2$$

内部に仕込まれているバネの弾性エネルギーをE_2とすると衝突前後における力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}m(v_C\cos\theta)^2 + E_2 = \underbrace{0}_{\frac{1}{4}mの分} + \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}m v_D^2}_{\frac{3}{4}mの分}$$

$$v_D = \frac{4}{3}V = \frac{4}{3}v_C\cos\theta$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}m\cdot\left(\frac{4}{3}v_C\cos\theta\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}m(v_C\cos\theta)^2$$

$$E_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}m(v_C\cos\theta)^2 - \frac{1}{2}m(v_C\cos\theta)^2$$

$$= \left(\frac{4}{3}-1\right)\cdot\frac{1}{2}m(v_C\cos\theta)^2$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}m v_C^2\cos^2\theta$$

$$= \frac{1}{3}E_1\cos^2\theta$$

よって失われた力学的エネルギーの和は

$$E_1 + E_2 = E_1 + \frac{1}{3}E_1\cos^2\theta$$

$$= E_1\left(1+\frac{1}{3}\cos^2\theta\right)$$

$$= \underline{mg(2R+h)\left(1+\frac{1}{3}\cos^2\theta\right)}$$

2020 阪大

〔2〕問1 回路全体の合成容量は.

$$C_{全} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

であるから. コンデンサー1,2 に蓄えられた電気量は. どちらも

$$Q = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} E$$

となる. また. コンデンサー2 の極板間電位差を V_1 とすると.

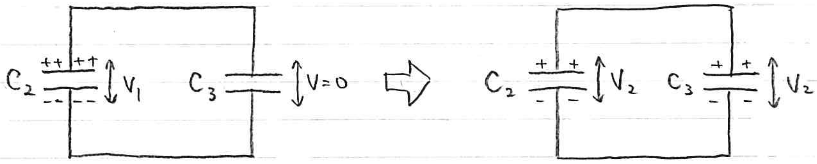
$$Q = C_2 V_1$$

とも表せるので.

$$C_2 V_1 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} E$$

$$V_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} E$$

問2



電気量保存則より

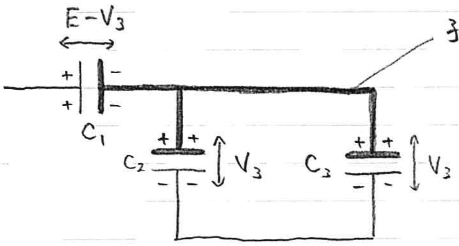
$$C_2 V_1 = C_2 V_2 + C_3 V_2$$

$$\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} E = (C_2 + C_3) V_2$$

$$V_2 = \frac{C_1 C_2}{(C_1 + C_2)(C_2 + C_3)} E$$

S_1 が開かれているので.
コンデンサー1の電荷は
移動先がなく. 故

問3



孤立部分の電気量は 0

電気量保存則より

$$0 = -C_1(E - V_3) + C_2 V_3 + C_3 V_3$$

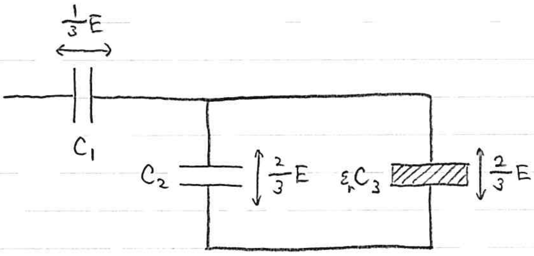
$$= -C_1 E + C_1 V_3 + C_2 V_3 + C_3 V_3$$

$$C_1 E = (C_1 + C_2 + C_3) V_3$$

$$V_3 = \frac{C_1}{C_1 + C_2 + C_3} E$$

2020 阪大

〔2〕問4



コンデンサー2の電位差が、コンデンサー1の電位差の2倍であり、
コンデンサー2と3は並列接続のための電位差が等しいので、
各コンデンサーの電位差は図のようになる。

(i) 電気量保存則で解く

問3と同様、孤立部分の電気量の和は0であるから、

$$0 = -\frac{1}{3}C_1E + \frac{2}{3}C_2E + \frac{2}{3}\varepsilon_r C_2 E$$

$$= -C_1 + 2C_2 + 2\varepsilon_r C_3$$

$$2\varepsilon_r C_3 = C_1 - 2C_2$$

$$\varepsilon_r = \frac{C_1 - 2C_2}{2C_3}$$

(ii) 置換して解く。

問3の V_3 において、$V_3 \mapsto V_3' = \frac{2}{3}E$ ，$C_3 \mapsto \varepsilon_r C_3$ と置換して、

$$V_3 = \frac{C_1}{C_1 + C_2 + C_3}E$$

$$\longmapsto \quad \frac{2}{3}\cancel{E} = \frac{C_1}{C_1 + C_2 + \varepsilon_r C_3}\cancel{E}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{C_1 + C_2 + \varepsilon_r C_3}{C_1}$$

$$\frac{3C_1}{2} = C_1 + C_2 + \varepsilon_r C_3$$

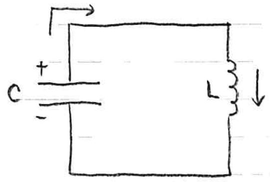
$$\varepsilon_r C_3 = \frac{3C_1}{2} - C_1 - C_2$$

$$= \frac{C_1 - 2C_2}{2}$$

$$\varepsilon_r = \frac{C_1 - 2C_2}{2C_3}$$

2020 阪大

(2) 問5



S_4を閉じたあと，コイルに流れる電流が増加している間，ダイオードがあるため抵抗には電流が流れない
この間のエネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}CE^2 = \frac{1}{2}LI_0^2$$

$$\underline{I_0 = E\sqrt{\frac{C}{L}}}$$

問6　ソレノイドコイル内部における磁場の大きさは

$$H = nI$$

であり，電流の大きさのみで決まる．よってコイルに流れる電流の大きさが最大値I_0となるとき，磁場の大きさが最大となるので

$$\underline{H_0 = nI_0}$$

問7　磁場の大きさが最大になるまでの間は，LC振動回路と見做すことができ，その時間は$T/4$に相当する
よって，

$$t_0 = \frac{T}{4}$$

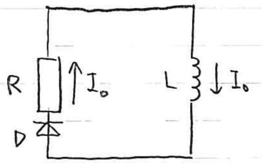
$T = 2\pi\sqrt{LC}$

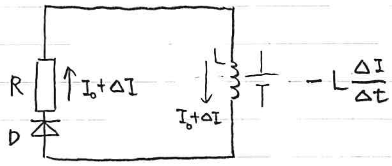
$$= \frac{1}{4}\cdot 2\pi\sqrt{LC}$$

$$= \underline{\frac{\pi}{2}\sqrt{LC}}$$

2020 阪大

[2] 問8





スイッチを開いた瞬間，$I=I_0$ で，ダイオードと抵抗に電流が流れる
その後，時刻 t_0 の微小時間 Δt 後には $I=I_0+\Delta I$ となり，
コイルに誘導起電力が生じる

このとき，キルヒホッフ第2法則により，

$$-L\frac{\Delta I}{\Delta t} = R(I_0+\Delta I)$$
$$= RI_0 + R\Delta I$$
$$-L\Delta I = RI_0\Delta t + \underbrace{R\Delta I\Delta t}$$
$$\fallingdotseq RI_0\Delta t$$

微小量として落とす．

∴

$$\frac{\Delta I}{I_0\Delta t} = -\frac{R}{L}$$

問9

$0 \leq t \leq t_0$ のとき，回路はLC振動回路と見做せるので，
電流の大きさは sin カーブを描く

⟶ (あ)

$t_0 < t$ のとき，問8より

$$\frac{\Delta I}{\Delta t} = -\frac{R}{L}I_0$$

が成り立つので，時間とともに I は減少する．
また，その減少率も小さくなっていくので．

⟶ (か)

問9(別)

問8より

$$\frac{dI}{I\,dt} = -\frac{R}{L}$$
$$\int\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}\int dt$$
$$\log|I| = -\frac{R}{L}t + C \quad (C:\text{const})$$

$t=t_0$ のとき $I=I_0 (>0)$

$$\log I_0 = -\frac{R}{L}t_0 + C$$

$$\therefore\ C = \log I_0 + \frac{R}{L}t_0$$
$$\therefore\ \log I = -\frac{R}{L}t + \log I_0 + \frac{R}{L}t_0$$
$$\log\frac{I}{I_0} = -\frac{R}{L}(t-t_0)$$
$$\frac{I}{I_0} = \exp\left\{-\frac{R}{L}(t-t_0)\right\}$$
$$I = I_0\exp\left\{-\frac{R}{L}(t-t_0)\right\}$$

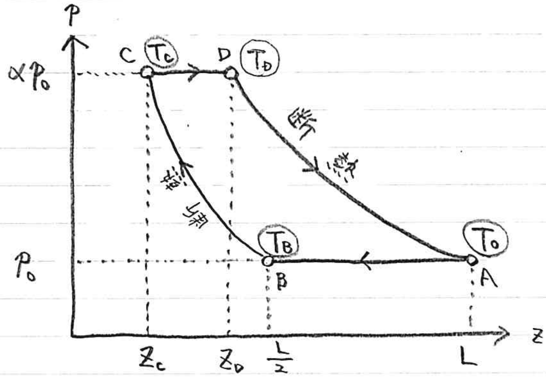
⟶ (か)

2020 阪大

〔3〕 単原子分子の理想気体を扱っているため、

定積モル比熱 $C_V = \frac{3}{2}R$

定圧モル比熱 $C_P = \frac{5}{2}R$ を用いることができる。



状態B, C, Dにおける温度をそれぞれ T_B, T_C, T_D とし、

状態Cにおけるピストンの位置を z_C としておく

ピストンの断面積はSとする。

問1 状態AB間で、ボイル-シャルル則を適用し、

$$\frac{P_0 L S}{T_0} = \frac{P_0 \cdot \frac{L}{2} \cdot S}{T_B}$$

ボイル-シャルル則 $\boxed{\frac{PV}{T} = \text{const.}}$

$\therefore$

$$T_B = \frac{T_0}{2}$$

問2 過程A→Bは定圧変化であるから

$Q = nC_P \Delta T$ より

$$Q_1 = 1 \cdot \frac{5}{2}R \cdot \left(\frac{T_0}{2} - T_0\right)$$

$$= -\frac{5}{4}RT_0 \quad \text{(放熱)}$$

問3 状態BC間で、ポアソン則を適用し、

$$\cancel{P_0}\left(\frac{L}{2}\cancel{S}\right)^{\gamma} = \alpha \cancel{P_0}(z_C \cancel{S})^{\gamma}$$

ポアソン則 $\boxed{PV^{\gamma} = \text{const.}}$

$$\left(\frac{L}{2}\right)^{\gamma} = \alpha z_C^{\gamma}$$

$$z_C^{\gamma} = \alpha^{-1}\left(\frac{L}{2}\right)^{\gamma}$$

↓ 両辺γ乗根とって（指数を$\frac{1}{\gamma}$倍して）

$$z_C = \alpha^{-\frac{1}{\gamma}} \cdot \frac{L}{2}$$

2020 阪大

〔3〕問3続　状態BC間で，ボイル・シャルル則を適用し，

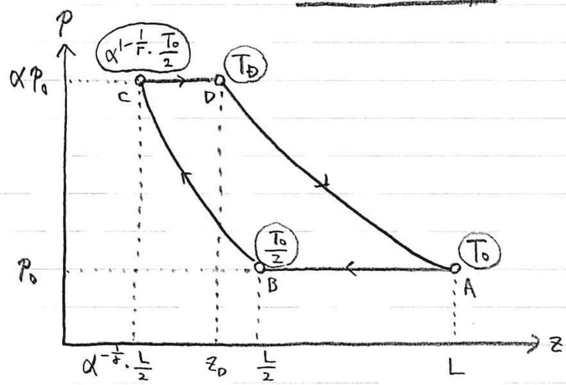
$$\frac{\cancel{P_0}\left(\frac{L}{2}\cancel{S}\right)}{\frac{T_0}{\cancel{2}}} = \frac{\alpha\cancel{P_0}\cdot z_c\cancel{S}}{T_c}$$

$$\frac{L}{T_0} = \frac{\alpha z_c}{T_c}$$

$$T_c = \frac{\alpha z_c}{L}T_0$$

$$= \frac{\alpha}{L}\cdot\alpha^{-\frac{1}{\gamma}}\frac{L}{2}\cdot T_0$$

$$= \alpha^{1-\frac{1}{\gamma}}\frac{T_0}{2}$$



問4　状態DA間で，ポアソン則を適用し

$$\alpha\cancel{P_0}(z_D\cancel{S})^\gamma = \cancel{P_0}(L\cancel{S})^\gamma$$

$$\alpha z_D^\gamma = L^\gamma$$

$$z_D^\gamma = \alpha^{-1}L^\gamma$$

両辺γ乗根とって（指数を$\frac{1}{\gamma}$倍して）

$$z_D = \alpha^{-\frac{1}{\gamma}}L$$

問5　状態CD間で，ボイル・シャルル則を適用し，

$$\frac{\alpha\cancel{P_0}\cdot z_c\cancel{S}}{T_c} = \frac{\alpha\cancel{P_0}\cdot z_D\cancel{S}}{T_D}$$

$$T_D = \frac{z_D}{z_c}T_c$$

$$= \frac{\alpha^{-\frac{1}{\gamma}}\cdot L}{\alpha^{-\frac{1}{\gamma}}\cdot\frac{L}{2}}T_c = 2T_c$$

である

2020 阪大

〔3〕問5続　過程C→Dは定圧変化であるから，

$Q = nC_p \Delta T$ より

$$Q_2 = 1 \cdot \frac{5}{2}R\left(2T_c - T_c\right)$$
$$= \frac{5}{2}R \cdot \frac{T_0}{2}\alpha^{1-\frac{1}{\gamma}}$$
$$= \underline{\frac{5}{4}\alpha^{1-\frac{1}{\gamma}}RT_0} \quad \text{（吸熱）}$$

問6.　A→B→C→D→Aのサイクルにおいて，
熱量は，断熱過程B→C，D→Aにおいては0，
A→BにおいてQ_1（放熱），C→DにおいてQ_2（吸熱）であり，
気体が外部にした仕事は，熱力学第一法則

$Q = \Delta U + W$　：Wは気体が外部にした仕事　より

$Q_1 + Q_2 = 0 + W$

であるから，

$Q_1 < 0$，$Q_2 > 0$ だが，気体に入る向きを正とするので，単純に加算すればよい．

$$e = \frac{W}{Q_2} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_2} = 1 + \frac{Q_1}{Q_2}$$
$$= 1 + \frac{-\frac{5}{4}RT_0}{\frac{5}{4}\alpha^{1-\frac{1}{\gamma}}RT_0}$$
$$= 1 - \frac{1}{\alpha^{1-\frac{1}{\gamma}}}$$
$$= \underline{1 - \alpha^{\frac{1}{\gamma}-1}} \quad (>0)$$

$\gamma = \frac{5}{3}$を代入して検算しておくとよい

問7

$$e = 1 - \alpha^{\frac{1}{\gamma}-1} \geq \frac{1}{2}$$

$\gamma = \frac{5}{3}$として

$$1 - \alpha^{\frac{3}{5}-1} \geq \frac{1}{2}$$
$$1 - \alpha^{-\frac{2}{5}} \geq \frac{1}{2}$$
$$\alpha^{-\frac{2}{5}} \leq \frac{1}{2} \quad (= 2^{-1})$$

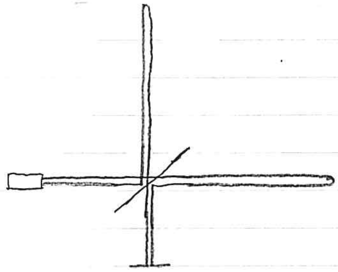
両辺指数を$\left(-\frac{5}{2}\right)$倍して．

$$\alpha \leq 2^{\frac{5}{2}}$$
$$= 4\sqrt{2}$$

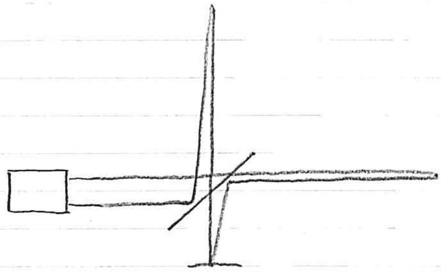
$$\therefore \quad \underline{\alpha_{min} = 4\sqrt{2}}$$

2020 阪大

[3]

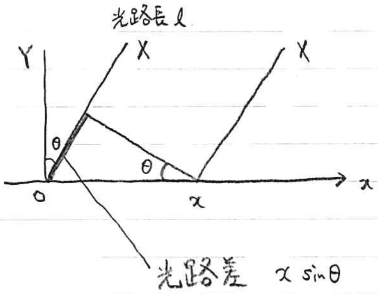


ハーフミラーでの反射が厳密に90°であるとき



ハーフミラーでの反射が90°より、ごくわずかにずれているとき

問8.



経路Xを通り $x=0$ に入射する光の光路長は l であり、
経路Xを通り $x=\forall x$ に入射する光は、それよりも $x\sin\theta$ だけ短い

よって、$\underline{l - x\sin\theta}$

問9　経路Yからきた光の光路長は、全て同じなので、この長さをLとすると
強め合いの干渉条件は

$$L-(l-x\sin\theta) = m\lambda$$

$x=0$ の明線を0次の明線として $m=0$ とすると

$$L-l = 0$$

であるから強め合いの干渉条件は

$$x\sin\theta = m\lambda$$

となる。$m=0$ のとき、$x_0\sin\theta = 0$
$m=1$ のとき、$x_1\sin\theta = \lambda$ であるから

$$\Delta x = x_1 - x_0$$
$$= \underline{\frac{\lambda}{\sin\theta}}$$

問9別.　直接求めてもよい。

$m=0$ のとき　$L-(l-x_0\sin\theta)=0$

$$x_0 = \frac{l-L}{\sin\theta}$$

$m=1$ のとき　$L-(l-x_1\sin\theta)=\lambda$

$$x_1 = \frac{\lambda+l-L}{\sin\theta} = \frac{\lambda}{\sin\theta}+x_0$$

$$\therefore\ \Delta x = x_1 - x_0 = \underline{\frac{\lambda}{\sin\theta}}$$

2020 阪大

〔3〕問10　経路Xを通る光の光路長が2Dだけ伸びた，とあるので，

$$l - x\sin\theta \longmapsto l - x\sin\theta + 2D$$

と置換すると強め合いの干渉条件は

$$L - (l - x\sin\theta + 2D) = m\lambda$$

ここで $L - l = 0$ より

$$x\sin\theta - 2D = m\lambda$$

いま，干渉縞は x軸に沿って Δx_1 だけ動いた，とあるので，
$m = 0$ のとき，$x = \Delta x_1$

∴

$$\Delta x_1 \sin\theta - 2D = 0$$

$$\underline{\Delta x_1 = \frac{2D}{\sin\theta}}$$

問11　容器A内の光路長が $(1+\alpha)L$ となるので，往復分も考慮すると，
光路長が

$$2\{(1+\alpha)L - L\} = 2(L + \alpha L - L)$$
$$= 2\alpha L$$

だけ伸びるので，問10の2Dを $2\alpha L$ と置換して，同様の手順により，

$$\underline{\Delta x_2 = \frac{2\alpha L}{\sin\theta}}$$

問12　経路Yを通る光の電場は，

$$E_Y = E_0 \sin\omega t$$
$$= E_0 \sin 2\pi f t$$

経路Xを通る光の電場は，光路差が $x\sin\theta$ だけ短いので，

$$t_0 = \frac{x\sin\theta}{c} = \frac{x\sin\theta}{f\lambda}$$ だけ早く面Fに到達する

よって

$$E_X = E_0 \sin\omega(t + t_0)$$
$$= E_0 \sin 2\pi f\left(t + \frac{x\sin\theta}{f\lambda}\right)$$
$$= E_0 \sin 2\pi\left(ft + \frac{x\sin\theta}{\lambda}\right)$$

ここから，

$$(E_X + E_Y)^2 = E_0^2\left[\sin 2\pi\left(ft + \frac{x\sin\theta}{\lambda}\right) + \sin 2\pi f t\right]^2$$

和→積の公式

$$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$= E_0^2\left[2\sin 2\pi\frac{\left(ft + \frac{x\sin\theta}{\lambda}\right) + ft}{2}\cos 2\pi\frac{\left(ft + \frac{x\sin\theta}{\lambda}\right) - ft}{2}\right]^2$$

2020 阪大

[3]問12続

$$(E_x + E_Y)^2 = 4E_0^2\left[\sin\pi\left(2ft + \frac{x\sin\theta}{\lambda}\right)\cos\pi\frac{x\sin\theta}{\lambda}\right]^2$$

$$= 4E_0^2 \underbrace{\sin^2 2\pi\left(ft + \frac{x\sin\theta}{2\lambda}\right)}_{\text{時間平均は}\frac{1}{2}} \underbrace{\cos^2\frac{\pi x\sin\theta}{\lambda}}_{\text{時間に依存しない}}$$

よって、

$$I(t) = 4E_0^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos^2\frac{\pi x\sin\theta}{\lambda}$$

$$= 2E_0^2\cos^2\frac{\pi x\sin\theta}{\lambda}$$

補　　和ー積の公式

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$+)\ \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta \quad \text{―――} (*)$$

$\alpha+\beta = A$, $\alpha-\beta = B$ とおくと.

$$\alpha+\beta = A \qquad\qquad \alpha+\beta = A$$

$$+)\ \alpha-\beta = B \qquad\qquad -)\ \alpha-\beta = B$$

$$2\alpha = A+B \qquad\qquad 2\beta = A-B$$

$$\alpha = \frac{A+B}{2} \qquad\qquad \beta = \frac{A-B}{2}$$

(*)に代入すると.

$$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$