2021 京大

I(ア) 力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}\cancel{m}V^2 = \frac{1}{2}\cancel{m}V_0^2 + \cancel{m}gh$$

$$V^2 = V_0^2 + 2gh$$

$$V_0^2 = V^2 - 2gh$$

$$V_0 = \underline{\sqrt{V^2 - 2gh}}\ /\!/$$

(イ) 鉛直上向きを正として、鉛直成分について、

$$v^2 - v_0^2 = -2gy \quad \text{より}$$

$$(-V_0\sin\theta_1)^2 - (V\sin\theta)^2 = -2gh$$

$$V_0^2\sin^2\theta_1 - V^2\sin^2\theta = -2gh$$

$$V_0^2\sin^2\theta_1 = V^2\sin^2\theta - 2gh$$

$$\sin^2\theta_1 = \frac{V^2\sin^2\theta - 2gh}{V_0^2}$$

$$\sin\theta_1 = \underline{\sqrt{\frac{V^2\sin^2\theta - 2gh}{V^2 - 2gh}}}\ /\!/$$

(ウ)

$$mv_1 + Mw_1 = \underline{-mV_0 + MV_0}\ /\!/$$

(エ)

$$e = \frac{\text{遠ざかる速さ}}{\text{近づく速さ}} \quad \text{より}$$

$e = 1$ として

$$1 = \frac{v_1 - w_1}{2V_0}$$

$$= \underline{-\frac{v_1 - w_1}{-2V_0}}\ /\!/$$

(オ)(カ) (ウ)(エ)を連立して、(エ)より

$$2V_0 = v_1 - w_1$$

$$v_1 = 2V_0 + w_1 \quad \text{——— (*)}$$

(ウ)へ代入

$$m(2V_0 + w_1) + Mw_1 = -mV_0 + MV_0$$

$$2mV_0 + (M+m)w_1 = -mV_0 + MV_0$$

$$(M+m)w_1 = MV_0 - 3mV_0$$

$$w_1 = \underline{\frac{M-3m}{M+m}V_0}\ /\!/ \quad \text{(カ)}$$

(*)へ代入

$$v_1 = 2V_0 + \frac{M-3m}{M+m}V_0$$

$$= \underline{\frac{3M-m}{M+m}V_0}\ /\!/ \quad \text{(オ)}$$

2021 京大

I (キ) $w_1 = 0$ のとき, (カ) より

$$0 = \frac{M-3m}{M+m} V_0$$

$$M - 3m = 0$$

$$M = 3m$$

よって $\underline{3倍}$

(ク) これを (オ) に代入すると

$$v_1 = \frac{9m - m}{3m + m} V_0$$

$$= \frac{8m}{4m} V_0$$

$$= 2V_0$$

よって $\underline{2倍}$

(ケ) 弾性衝突をしているので, 力学的エネルギーは水平,鉛直成分ともに保存する
鉛直成分の力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}\cancel{m}(2V_0 \sin\theta_1)^2 + \cancel{m}gh = \cancel{m}gh_1$$

$$2V_0^2 \sin^2\theta_1 + gh = gh_1$$

$$h_1 = h + \frac{2V_0^2 \sin^2\theta_1}{g}$$

$V_0 = (ア)$, $\sin\theta_1 = (イ)$ を代入

$$= h + \frac{2}{g}\cancel{(V^2 - 2gh)} \cdot \frac{V^2\sin^2\theta - 2gh}{\cancel{V^2 - 2gh}}$$

$$= h + \frac{2}{g}(V^2 \sin^2\theta - 2gh)$$

$$= \underline{\frac{2V^2\sin^2\theta}{g} - 3h}$$

(コ) 反発係数の式より

$$1 = \frac{v_n}{V_0 + v_{n-1}}$$

$$= \frac{a_n V_0}{V_0 + a_{n-1} V_0}$$

$$= \frac{a_n}{1 + a_{n-1}}$$

$$\underline{a_n = a_{n-1} + 1}$$

2021 京大

I (サ)　(コ) より

$$a_n - a_{n-1} = 1$$

であるから公差1の等差数列である。

$$a_1 = 2$$

であるためには、

$$a_n = a_1 + (n-1)d \quad \text{より}$$

$$a_n = 2 + (n-1)\times 1$$

$$= 1 + n$$

(シ)　n回目の衝突直後における小球の速度成分 v_n を $a_n V_0$ とすると、(ケ)と同様に、鉛直成分の力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}\cancel{m}\left(a_n V_0 \sin\theta_1\right)^2 + \cancel{m}gh = \cancel{m}gh_n$$

$$h_n = h + \frac{1}{2g}\left(a_n V_0 \sin\theta_1\right)^2$$

$$= h + \frac{1}{2g}\left\{(n+1)V_0 \sin\theta_1\right\}^2$$

$$= h + \frac{(n+1)^2}{2g}\cdot\left(V_0 \sin\theta_1\right)^2$$

$V_0 = $(ア)、$\sin\theta_1 = $(イ)を代入すると(ケ)と同様の式処理となり、

$$= h + \frac{(n+1)^2}{2g}\cdot\left(V^2\sin^2\theta - 2gh\right)$$

問1.(タ)　運動量保存則より

$$-mv_{n-1} + M_n V_0 = mv_n$$

$$-m a_{n-1} \cancel{V_0} + M_n \cancel{V_0} = m a_n \cancel{V_0}$$

$$-mn + M_n = m(n+1)$$

$$M_n = (2n+1)m$$

$$\therefore \frac{M_n}{m} = 2n+1 \quad \text{(倍)}$$

2021 京大

問1 (iii) $M_n \leq 10m$ のとき,

$$\frac{M_n}{m} = 2n+1 \leq 10$$

$$2n \leq 9$$

$$n \leq 4.5$$

よって,衝突回数の上限は,4回目のときであるから,
$h=0$ の場合について,(シ)式

$$h_n = \frac{(n+1)^2}{2g} \cdot V^2 \sin^2\theta$$ より

$$h_4 = \frac{(4+1)^2}{2g} V^2 \sin^2\theta$$

$$= 25 \cdot \frac{V^2 \sin^2\theta}{2g}$$

ここで,

$$h_0 = \frac{V^2 \sin^2\theta}{2g}$$ であるから

これを利用すると早い

$$h_4 = 25 h_0$$

よって

25倍

2021 京大

II (イ) ファラデーの法則より

$$|V| = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{\Delta(BS)}{\Delta t}$$

$$= B\frac{\Delta S}{\Delta t}$$

$$= B\frac{\Delta\left(\frac{1}{2}L^2\theta\right)}{\Delta t}$$

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$= B\cdot\frac{1}{2}L^2\omega$$

$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ より 半周を $t = T$ とするならば、一周で $2T$ になるので、

$$\omega = \frac{2\pi}{2T}$$

$$= \underline{\frac{BL^2}{2}\cdot\frac{\pi}{T}}$$

(ロ)

$I = \dfrac{V}{R}$ より

$$= \underline{\frac{BL^2}{2R}\cdot\frac{\pi}{T}}$$

(ハ) (ジュール熱) $= \underline{RI^2}\,\Delta t$

(ニ) 静電エネルギーは

$$U = \frac{1}{2}QV$$

であるから、変化量を ΔU とすると Q, V もそれぞれ変化し、

$$U + \Delta U = \frac{1}{2}(Q+\Delta Q)(V+\Delta V)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}QV}_{=U} + \frac{1}{2}Q\Delta V + \frac{1}{2}\Delta Q\cdot V + \underbrace{\frac{1}{2}\Delta Q\Delta V}_{\text{微小項は無視する}}$$

$$\therefore \Delta U = \frac{1}{2}Q\cdot\frac{\Delta Q}{C} + \frac{1}{2}\Delta Q\cdot\frac{Q}{C}$$

$$= \frac{Q\Delta Q}{C}$$

$\Delta Q = I\Delta t$

$$= \underline{\frac{QI}{C}}\,\Delta t$$

2021 京大

Ⅱ(ホ) (ハ)と(ニ)の和は

$$\left(RI^2 + \frac{QI}{C}\right)\Delta t$$

$$= \left(RI + \frac{Q}{C}\right) I \Delta t$$

(ア)式のキルヒホッフ第2法則より

$$= \underline{\frac{BL^2}{2} \cdot \frac{\pi}{T} \cdot I \Delta t}$$

(ヘ) $Q = CV$ より

$$Q_c = \underline{C \cdot \frac{BL^2}{2} \cdot \frac{\pi}{T}}$$

(ト) $\Delta Q = I \Delta t$ より

$$Q_c = I t_c$$

$$\frac{CBL^2}{2} \cdot \frac{\pi}{T} = I t_c$$

(ア)式より、$t = 0$ のとき、$Q = 0$ であることを考慮すると、

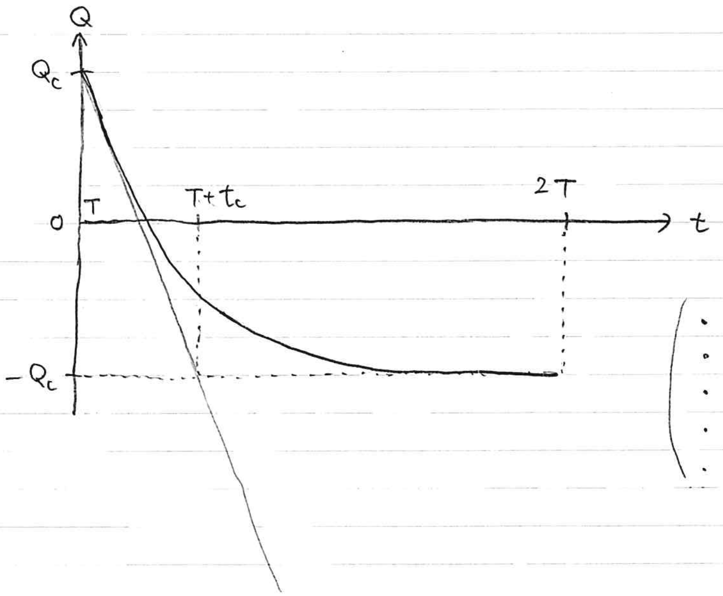
$$\frac{BL^2}{2} \cdot \frac{\pi}{T} = IR$$

となるから

$$C \cdot IR = I t_c$$

$$t_c = \underline{CR}$$

問1.



・$+Q_c$ スタート
・$-Q_c$ ゴール
・T ~ 2T
・上下逆
・t_c 同じ

2021 京大

Ⅱ(チ) (iii)式

$$Q(t) = Q_\infty + (Q_0 - Q_\infty)e^{-a(t-t_0)}$$

において, $Q_\infty = +Q_c$, $Q_0 = 0$, $Q(t) = Q(T)$, $t = T$, $t_0 = 0$ と置換して,

$$Q(T) = Q_c - Q_c e^{-aT}$$

さらに $e^{-aT} = x$ とおいて

$$Q(T) = Q_c \underline{(1-x)}$$

(リ) T～2T を考えると, コンデンサーに蓄えられる電荷は逆符号になるので,
$Q_\infty = -Q_c$ と置換する. また, $Q_0 = Q(T)$, $Q(t) = Q(2T)$,
$t = 2T$, $t_0 = T$ と置換して,

$$\begin{aligned}
Q(2T) &= -Q_c + (Q(T) + Q_c)e^{-a(2T-T)} \\
&= -Q_c + \{Q_c(1-x) + Q_c\}x \\
&= -Q_c + (1-x)xQ_c + xQ_c \\
&= Q_c\{-1 + (1-x)x + x\} \\
&= Q_c(-1 + x - x^2 + x) \\
&= Q_c(-1 + 2x - x^2) \\
&= -Q_c(1 - 2x + x^2) \\
&= -Q_c(1-x)^2 \qquad (= -Q_c(x-1)^2)\text{同義} \\
&= \underline{-(1-x)^2} \cdot Q_c
\end{aligned}$$

(ヌ) 2T～3T では再びコンデンサーに蓄えられる電荷が逆符号になり, $Q_\infty = +Q_c$
となる. また, $Q_0 = Q(2T)$, $Q(t) = Q(3T)$, $t = 3T$, $t_0 = 2T$ として,

$$\begin{aligned}
Q(3T) &= Q_c + (Q(2T) - Q_c)e^{-a(3T-2T)} \\
&= Q_c + \{-(1-x)^2 Q_c - Q_c\}x \\
&= Q_c\{1 - (1-x)^2 x - x\} \\
&= Q_c\{1 - x - (1-x)^2 x\} \\
&= Q_c(1-x)\{1 - (1-x)x\} \\
&= Q_c\underline{(1-x)(1 - x + x^2)}
\end{aligned}$$

2021 京大

Ⅱ問2 $t = t_0$ で, $Q_0 = -\frac{4}{9}Q_c$,

$t = t_c$ で, $Q(t_c) = \frac{4}{9}Q_c$ として,

$t_c - t_0 = T$ であるから(iii)式より

$$\frac{4}{9}Q_c = Q_c + \left(-\frac{4}{9}Q_c - Q_c\right)e^{-a(t_c-t_0)}$$

$$= Q_c - \frac{13}{9}Q_c \cdot x$$

$$= Q_c\left(1 - \frac{13}{9}x\right)$$

$$\frac{4}{9} = 1 - \frac{13}{9}x$$

$$\frac{13}{9}x = \frac{5}{9}$$

$$x = \frac{5}{13}$$

ここで

$x = e^{-aT}$ より. $a = \frac{1}{t_c}$ としているので.

$$x = e^{-\frac{T}{t_c}}$$

$$\frac{5}{13} = e^{-\frac{T}{t_c}}$$

$$\frac{13}{5} = e^{\frac{T}{t_c}}$$

$$2.6 = e^{\frac{T}{t_c}}$$

また.

$$e \fallingdotseq 2.72$$

であるから

$$\frac{T}{t_c} < 1$$

であるとわかる.

よって.

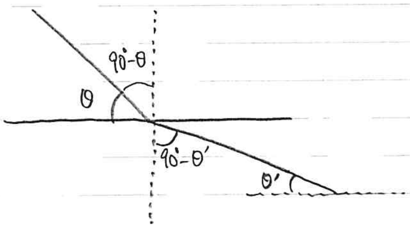
$$\underline{T < t_c}$$

2021 京大

III (あ) $2d\sin\theta$

(い) $2d\sin\theta = k\lambda$

(う)



スネルの法則(屈折の法則)より

$$\frac{\sin(90°-\theta)}{\sin(90°-\theta')} = n$$

$$\frac{\cos\theta}{\cos\theta'} = n$$

∴

$$\cos\theta = n\cos\theta'$$

(え) $\lambda' = \dfrac{\lambda}{n}$

(お) 経路差は

$$2nd\sin\theta' = 2nd\sqrt{1-\cos^2\theta'}$$
$$= 2nd\sqrt{1-\frac{\cos^2\theta}{n^2}}$$
$$= 2d\sqrt{n^2-\cos^2\theta}$$

であるから、位相差は

$$(\text{位相差}) = (\text{経路差}) \times \frac{2\pi}{\lambda}$$
$$= \frac{2\pi}{\lambda}\cdot 2d\sqrt{n^2-\cos^2\theta}$$
$$= \frac{4\pi d}{\lambda}\sqrt{n^2-\cos^2\theta}$$

(か) (お)が 2π の整数倍のとき、X線が強め合うので、

$$\frac{4\pi d}{\lambda}\sqrt{n^2-\cos^2\theta} = 2\pi k$$ より

$$\frac{2d}{\lambda}\sqrt{n^2-\cos^2\theta} = k$$

$$2d\sqrt{n^2-\cos^2\theta} = k\lambda$$

2021 京大

III(き) 質量 m の中性子が A で散乱(反発)され，辺 DC まで打ち上がるので，位置エネルギーを持つようになる
辺 AB を高さの基準として，力学的エネルギー保存則を立てると，
辺 DC での速さを v として，

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgs$$

$$v_0^2 = v^2 + 2gs$$

$$v^2 = v_0^2 - 2gs$$

ド・ブロイ波長の式により

$$\lambda_0 = \frac{h}{mv_0}$$

$$\lambda' = \frac{h}{mv}$$

であるから，

$$\frac{\lambda'}{\lambda_0} = \frac{v_0}{v} = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 - 2gs}}$$

$$\underline{\lambda' = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 - 2gs}}\lambda_0} \,//$$

問1 経路 ABCE を通る場合と，経路 ADCE を通る場合とでは，AD 間と BC 間での光路差は同じであるから，DC 間と AB 間での光路差を考えるといい．

$$(\text{位相}) = \frac{2\pi}{\lambda} \times (\text{光路長})$$ より．

$$(\text{DC 間の位相}) = \frac{2\pi}{\lambda'}l$$

$$(\text{AB 間の位相}) = \frac{2\pi}{\lambda_0}l$$

よって両者の位相差 Λ は

$$\Lambda = \frac{2\pi}{\lambda_0}l - \frac{2\pi}{\lambda'}l$$

$$= \frac{2\pi l}{\lambda_0} - \frac{2\pi l\sqrt{v_0^2 - 2gs}}{v_0\lambda_0}$$

$$= \frac{2\pi l}{\lambda_0} - \frac{2\pi l}{\lambda_0}\sqrt{1 - \frac{2gs}{v_0^2}}$$

$gs \ll v_0^2$ であるから，

$$\fallingdotseq \frac{2\pi l}{\lambda_0} - \frac{2\pi l}{\lambda_0}\left(1 - \frac{gs}{v_0^2}\right)$$

$$= \frac{2\pi l}{\lambda_0}\left\{1 - \left(1 - \frac{gs}{v_0^2}\right)\right\}$$

$$\underline{= \frac{2\pi l}{\lambda_0} \cdot \frac{gs}{v_0^2}} \,//$$

2021 京大

Ⅲ 問2(i) 角度αを $0 \to \frac{\pi}{2}$ にする間に、
位相差は $0 \to \frac{2\pi l g s}{\lambda_0 v_0^2}$ になる。

$$\Lambda = \frac{2\pi l g s}{\lambda_0 v_0^2}$$

$\lambda_0 = \frac{h}{m v_0}$ より、 $\frac{1}{v_0^2} = \frac{m^2 \lambda_0^2}{h^2}$

$$= \frac{2\pi l g s}{\lambda_0} \cdot \frac{m^2 \lambda_0^2}{h^2}$$

$\frac{m^2 g}{h^2} = 6.25 \times 10^{13}$, $l s = 10^{-3}$, $\lambda_0 = 1.40 \times 10^{-10}$ を代入

$$= 2\pi \cdot 6.25 \times 10^{13} \cdot 10^{-3} \cdot 1.40 \times 10^{-10}$$

$$= 2\pi \times 8.75$$

よって、位相差が 0 のときも強め合うことも考慮すると、
強め合う回数は 9回

(ii) 角度αのとき、位相差は、

$$\Lambda = 2\pi \times 8.75 \cdot \sin\alpha$$

これが、はじめて弱め合うとき、位相差はπであればいいので、

$$2\cancel{\pi} \cdot 8.75 \cdot \sin\alpha = \cancel{\pi}$$

$$17.5 \sin\alpha = 1$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{17.5}$$

$$= 0.05714\ldots$$

$$\fallingdotseq 0.057$$

(これは、$\alpha \fallingdotseq 3.28°$ に相当)