2021 阪大

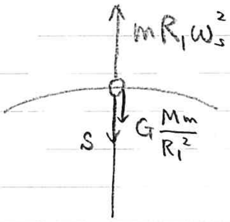
[1] 問1　1日で 2π [rad] 回転するので、

$$\omega_s = \frac{2\pi}{24 \times 60 \times 60}$$
$$= 7.272\ldots$$
$$= \underline{7 \times 10^{-5}\ \mathrm{rad/s}}$$

問2　円運動の運動方程式より、万有引力を向心力として、

$$\cancel{m} R_s \omega_s^2 = G\frac{M\cancel{m}}{R_s^2}$$
$$R_s^3 = \frac{GM}{\omega_s^2}$$
$$R_s = \underline{\sqrt[3]{\frac{GM}{\omega_s^2}}}$$

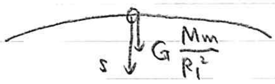
問3



張力の大きさを S として、人工衛星とともに動く系から見た力のつり合いの式は

$$S + G\frac{Mm}{R_1^2} = mR_1\omega_s^2 \text{(遠心力)}$$
$$S = \underline{mR_1\omega_s^2 - G\frac{Mm}{R_1^2}}$$

問3(別)



円運動の運動方程式より、

$$mR_1\omega_s^2 \text{(向心力)} = S + G\frac{Mm}{R_1^2}$$
$$S = \underline{mR_1\omega_s^2 - G\frac{Mm}{R_1^2}}$$

問4　力学的エネルギー保存則を用いる。無限遠で、ちょうど運動エネルギーが0となると考えると、

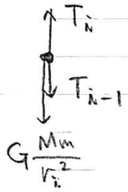
$$\frac{1}{2}m'v^2 - G\frac{Mm'}{r'} = 0$$

$\downarrow$ $v = r'\omega_s$

$$\frac{1}{2}\cancel{m'}(r'\omega_s)^2 - G\frac{M\cancel{m'}}{r'} = 0$$
$$r'^3\omega_s^2 - 2GM = 0$$
$$r'^3\omega_s^2 = 2GM$$
$$r'^3 = \frac{2GM}{\omega_s^2}$$
$$r' = \underline{\sqrt[3]{\frac{2GM}{\omega_s^2}}}$$

2021 阪大

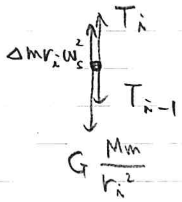
〔1〕問5(a)



質点の運動方程式は、円運動をしていることから

$$\Delta m r_i \omega_s^2 = T_{i-1} + G\frac{M\Delta m}{r_i^2} - T_i$$
$$= -F_i + G\frac{M\Delta m}{r_i^2}$$
$$F_i = G\frac{M\Delta m}{r_i^2} - \Delta m r_i \omega_s^2$$ //

(a)別



質点とともに運動する系から見た力のつり合いの式は

$$\Delta m r_i \omega_s^2 + T_i = G\frac{M\Delta m}{r_i^2} + T_{i-1}$$
$$T_i - T_{i-1} = G\frac{M\Delta m}{r_i^2} - \Delta m r_i \omega_s^2$$
$$F_i = G\frac{M\Delta m}{r_i^2} - \Delta m r_i \omega_s^2$$ //

(b) ワイヤーの単位長さ(ふつう、1m)あたりの質量をλとしている(これを線密度と呼ぶ)ので、長さΔrあたりの質量Δmは、

$$\Delta m = \lambda \Delta r$$ //

(c) (a)に(b)を代入すると

$$F_i = GM\lambda\frac{\Delta r}{r_i^2} - \lambda\omega_s^2 \cdot r_i \Delta r$$

となるから、

$$F = GM\lambda\left(\sum_{i=1}^{N} r_i^{-2}\Delta r\right) - \lambda\omega_s^2\left(\sum_{i=1}^{N} r_i \Delta r\right)$$
$$= GM\lambda \frac{1}{-2+1}\left(R_2^{-2+1} - R_0^{-2+1}\right) - \lambda\omega_s^2 \frac{1}{1+1}\left(R_2^{1+1} - R_0^{1+1}\right)$$
$$= GM\lambda\left(R_0^{-1} - R_2^{-1}\right) - \lambda\omega_s^2 \cdot \frac{1}{2}\left(R_2^2 - R_0^2\right)$$
$$= GM\lambda\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_2}\right) - \frac{1}{2}\lambda\omega_s^2\left(R_2^2 - R_0^2\right)$$ //

(d)
$$F = \sum_{i=1}^{N} F_i = (T_1 - T_0) + (T_2 - T_1) + (T_3 - T_2) + \cdots + (T_N - T_{N-1})$$
$$= -T_0 + T_N$$
$$= 0$$ //

Date 2021・3・13

2021 阪大

[1] 問6　(c)=(d) より

$$GM\times\left(\frac{1}{R_0}-\frac{1}{R_2}\right)=\frac{1}{2}\times\omega_s^2\left(R_2^2-R_0^2\right)$$

$$\frac{2GM}{\omega_s^2}\cdot\frac{R_2-R_0}{R_0R_2}=(R_2-R_0)(R_2+R_0)$$

$$2R_s^3\cdot\frac{1}{R_0R_2}=R_2+R_0$$

$$2R_s^3=R_0R_2(R_2+R_0)$$

$$0=R_0R_2^2+R_0^2R_2-2R_s^3$$

$$=R_2^2+R_0R_2-2\frac{R_s^3}{R_0}$$

∴

$$R_2=\frac{-R_0+\sqrt{R_0^2+4\cdot\frac{2R_s^3}{R_0}}}{2}$$

$$=\frac{-R_0+\sqrt{R_0^2+\frac{8R_s^3}{R_0}}}{2}$$

∴

$$\frac{R_2}{R_0}=\frac{-1+\sqrt{1+\frac{8R_s^3}{R_0^3}}}{2}$$

ここで，$R_s=7R_0$ とすると

$$\frac{R_2}{R_0}=\frac{-1+\sqrt{1+\frac{8\cdot7^3R_0^3}{R_0^3}}}{2}$$

$$=\frac{-1+\sqrt{1+2744}}{2}$$

$$=\frac{-1+3\sqrt{305}}{2}$$

$$\fallingdotseq\frac{-1+3\times17}{2}$$

$$=\frac{-1+51}{2}$$

$$=25$$

3 | 2745
3 | 915
5 | 305
　61

$17^2=289$
$18^2=324$

よって (え)

2021 阪大

〔2〕問1　消費地での電流の最大値を I_r とすると、消費地での時刻 t での電流 $i(t)$ は

$$i(t) = I_r \sin\omega t$$

と書けるので、電力は、

$$P_A(t) = V I_r \sin^2\omega t$$

$$\downarrow \quad I_r = \frac{V}{r}$$

$$= \frac{V^2}{r}\sin^2\omega t$$

問2

$$P_A(t) = V I_r \sin^2\omega t \quad \text{より}$$

$$\overline{P_A}(t) = V I_r \overline{\sin^2\omega t}$$

$$= \frac{1}{2} V I_r$$

$$I_r = \frac{2\overline{P_A}}{V}$$

問3.　コンデンサーのリアクタンスを X_c とすると時刻 t にコンデンサーを流れる電流 $i_c(t)$ は

$$i_c = \frac{v(t)}{X_c} = \omega C V\cos\omega t \quad \left(\because X_c = \frac{1}{\omega C},\ v = V\cos\omega t\right)$$

コンデンサーではズレる

よって最大値は、$\cos\omega t = 1$ のときであるから、

$$I_c = \omega C V$$

問4

$i_c = \omega C V\cos\omega t$、$i_R = I_r\sin\omega t$ より

$$i_R = \omega C V\cos\omega t + I_r\sin\omega t$$

$$= \sqrt{I_r^2 + (\omega C V)^2}\,\sin(\omega t + \phi)$$

$a\sin\theta + b\cos\theta$
$= \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\theta+\phi)$

よって、最大値は、$\sin(\omega t+\phi) = 1$ のときであるから、

$$I_R = \sqrt{I_r^2 + (\omega C V)^2}$$

ここに問2を代入して

$$I_R = \sqrt{\left(\frac{2\overline{P_A}}{V}\right)^2 + (\omega C V)^2}$$

2021 阪大

[2] 問5

$$\overline{P_B} = 2R\overline{i_R^2}$$

$$i_R^2 = I_R^2 \sin^2(\omega t + \phi) \quad より$$

$$\overline{i_R^2} = I_R^2 \overline{\sin^2(\omega t+\phi)}$$

$$= \frac{1}{2} I_R^2$$

$$= R I_R^2$$

$$= \underline{R\left\{\left(\frac{2\overline{P_A}}{V}\right)^2 + (\omega C V)^2\right\}}$$

問6 問5において

$$\left(\frac{2\overline{P_A}}{V}\right)^2 \geqq 0, \quad (\omega C V)^2 \geqq 0$$

であるから 相加平均・相乗平均の関係により

$$\overline{P_B} \geqq 2R\sqrt{\left(\frac{2\overline{P_A}}{V}\right)^2 \cdot (\omega C V)^2}$$

$$= 2R \cdot 2\overline{P_A} \cdot \omega C$$

$$= \underline{4\overline{P_A}\,\omega C R}$$

—相加平均・相乗平均の関係—

$a>0,\ b>0$ で,

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$a+b \geqq 2\sqrt{ab}$$

$a=b$ のとき等号成立

また,

$$\left(\frac{2\overline{P_A}}{V}\right)^2 = (\omega C V)^2$$

のとき, 等号が成立し, $\overline{P_B}$ が最小となる.
よって

$$\frac{(2\overline{P_A})^2}{V^2} = (\omega C)^2 V^2$$

$$V^4 = \left(\frac{2\overline{P_A}}{\omega C}\right)^2$$

$$V_{min} = \underline{\sqrt{\frac{2\overline{P_A}}{\omega C}}}$$

2021 阪大

[2] 問7 $\overline{P_B} = R\left\{\left(\frac{2\overline{P_A}}{V}\right)^2 + (\omega CV)^2\right\}$ において、

$R = 10\Omega$, $\overline{P_A} = 100$ 万kW $= 1.0\times10^9$ W　$V = 500$ kV $= 5.0\times10^5$ V

$f = 60$ Hz より $\omega = 2\pi f \fallingdotseq 380$　$C = 10\mu$F $= 1.0\times10^{-5}$ F

$$= 10\left\{\left(\frac{2\times10^9}{5\times10^5}\right)^2 + \left(380\cdot10^{-5}\cdot5\times10^5\right)^2\right\}$$

$$\fallingdotseq 10\{(0.4\times10^4)^2 + 1900^2\}$$

$$= 10\{(4\times10^3)^2 + 1.9^2\times10^6\}$$

$$\fallingdotseq 10(16\times10^6 + 4\times10^6)$$

$$= 10\cdot20\times10^6$$

$$= 20\times10^7 \text{ W}$$

$$= 20\times10^4 \text{ kW}$$

$$= 20 \text{ 万 kW}$$

よって (え) //

2021 阪大

[3] 問1

$\Delta U = \frac{3}{2}nR\Delta T$ となるから,

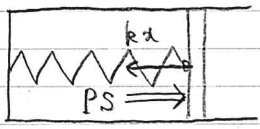
熱力学才一法則より

$$\Delta Q = \Delta U$$
$$= \underline{\frac{3}{2}nR\Delta T}$$

問2

$PV = nRT$ より.

$$PSx = nRT$$
$$PS = \frac{nRT}{x}$$



よって $PS = kx$

$$\frac{nRT}{x} = kx$$
$$x^2 = \frac{nRT}{k}$$
$$x = \underline{\sqrt{\frac{nRT}{k}}}$$

問3

$\Delta U = \frac{3}{2}nR\Delta T$ となるから

熱力学才一法則より.

$$\Delta Q = \Delta U + W$$

ここで, Wは, ばねが蓄えた弾性エネルギーに相当するので,
$W = \frac{1}{2}k(\Delta x)^2$

$$= \frac{3}{2}nR\Delta T + \frac{1}{2}k(\Delta x)^2$$

$\Delta x = \sqrt{\frac{nR\Delta T}{k}}$

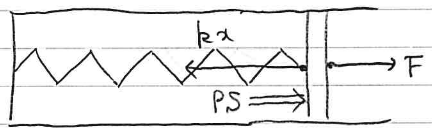
$$= \frac{3}{2}nR\Delta T + \frac{1}{2}k\cdot\frac{nR\Delta T}{k}$$
$$= \frac{3}{2}nR\Delta T + \frac{1}{2}nR\Delta T$$
$$= \underline{2nR\Delta T}$$

また, 系全体の熱容量をCとすると.

$$\Delta Q = C\Delta T$$
$$2nR\Delta T = C\Delta T$$
$$C = \underline{2nR}$$

2021 阪大

[3] 問4



問2と同様に計算して、

$$PS = \frac{nRT}{x}$$

よって、力のつり合いの式は、

$$\frac{nRT}{x} + F = kx$$

$$nRT + Fx = kx^2$$

$$0 = kx^2 - Fx - nRT$$

よって、

$$x = \frac{F + \sqrt{F^2 + 4knRT}}{2k}$$

問5 $F=0$ のとき、

$$x_0 = \frac{\sqrt{4knRT}}{2k} = \sqrt{\frac{nRT}{k}}$$

$$nRT = kx_0^2 \quad (F_0 = kx_0) = F_0 x_0$$

であるから、問4の式に代入すると、

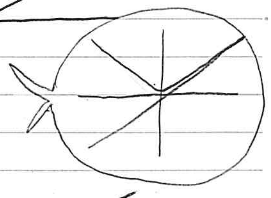
$$x = \frac{1}{2} \cdot \frac{x_0}{F_0}\left\{F + \sqrt{F^2 + 4 \cdot \frac{F_0}{\cancel{x_0}} \cdot F_0 \cancel{x_0}}\right\} \quad \left(\because k = \frac{F_0}{x_0},\ nRT = F_0 x_0\right)$$

$$= \frac{x_0}{2F_0}\left(F + \sqrt{F^2 + 4F_0^2}\right)$$

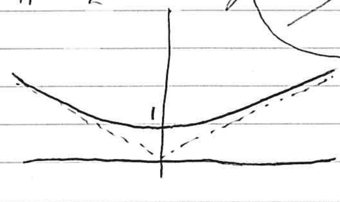
$$\frac{x}{x_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{F}{F_0} + \sqrt{\left(\frac{F}{F_0}\right)^2 + 4}\right)$$

→ $y = \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2+4}\right)$ として見たとき

第一項

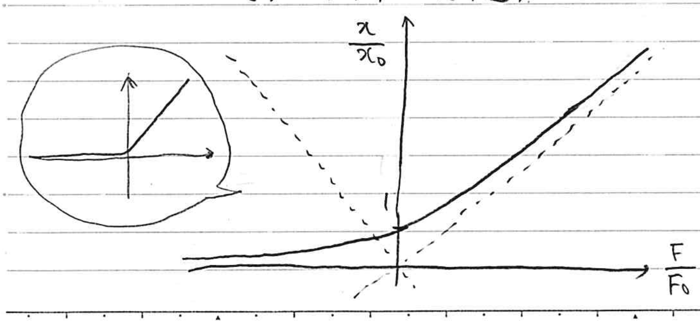


第二項



となる。

よってグラフは次の通り



2021 阪大

〔3〕問6

$$\frac{x}{x_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{F}{F_0} + \sqrt{\left(\frac{F}{F_0}\right)^2 + 4}\right) \quad \text{——} (*) \quad \text{より}$$

$$\frac{x+\Delta x}{x_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{F+\Delta F}{F_0} + \sqrt{\left(\frac{F+\Delta F}{F_0}\right)^2 + 4}\right) \quad \text{——} (**)$$

(a) $\frac{F}{F_0}$ が限りなく大きいとき.

(*)式は

$$\frac{x}{x_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{F}{F_0} + \frac{F}{F_0}\right)$$

$$\frac{x}{x_0} = \frac{F}{F_0}$$

(**)式は.

$$\frac{x+\Delta x}{x_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{F+\Delta F}{F_0} + \frac{F+\Delta F}{F_0}\right)$$

$$\frac{x+\Delta x}{x_0} = \frac{F+\Delta F}{F_0}$$

∴

$$\frac{\Delta x}{x_0} = \frac{\Delta F}{F_0}$$

$$\frac{F_0}{x_0} = \frac{\Delta F}{\Delta x}$$

$$k = k_{eff}$$

∴ $$\frac{k_{eff}}{k} = 1$$

(b) $\frac{F}{F_0} = 0$ のとき (**)式は.

$$\frac{x+\Delta x}{x_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta F}{F_0} + \sqrt{\left(\frac{\Delta F}{F_0}\right)^2 + 4}\right)$$

(*)式より

$$\frac{x}{x_0} = \frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$$

なので.

$$1 + \frac{\Delta x}{x_0} = \frac{\Delta F}{2F_0} + \frac{1}{2}\sqrt{\underbrace{\left(\frac{\Delta F}{F_0}\right)^2}_{\text{2次の項はムシできる}} + 4}$$

$$= \frac{\Delta F}{2F_0} + 1$$

∴ $$2\frac{F_0}{x_0} = \frac{\Delta F}{\Delta x}$$

$$2k = k_{eff}$$

∴ $$\frac{k_{eff}}{k} = 2$$

〔3〕問7　引力が $F = kr$ で表せることから AB間は、ばねでつながっている
と見立てることができる。

(a)　ばねの弾性力による位置エネルギーと見立てて、

$$U = \frac{1}{2}kr^2$$

(b)

$$\frac{Mv^2}{r} = kr$$

(c)　(b)より

$$Mv^2 = kr^2$$

$$\frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}kr^2$$

であるから、

$$E = K + U$$

$$= \frac{1}{2}kr^2 + \frac{1}{2}kr^2$$

$$= kr^2$$

(d)　物質波(ド・ブロイ波)の波長は、運動量の逆数に比例し、

$$\lambda_B = \frac{h}{Mv}$$

と書ける。(b)より

$$Mv^2 = kr^2$$

$$v = r\sqrt{\frac{k}{M}}$$

であるから、

$$\lambda_B = \frac{h}{M}\cdot\frac{1}{r}\sqrt{\frac{M}{k}}$$

$$= \frac{h}{r\sqrt{kM}}$$

2021 阪大

[3] 問7 (e) ボーアの量子条件は.

$$2\pi r_n = n\lambda_B$$

$$2\pi r_n = n \cdot \frac{h}{r_n\sqrt{kM}}$$

$$r_n^2 = \frac{nh}{2\pi\sqrt{kM}}$$

$$r_n = \sqrt{\frac{nh}{2\pi\sqrt{kM}}} \quad (n = 1, 2, 3 \cdots)$$

(f) $E = kr^2$ より

$$E_n = kr_n^2$$

$$= \frac{nkh}{2\pi\sqrt{kM}}$$

$$= \frac{nh}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M}} \quad (n = 1, 2, 3 \cdots)$$

(g) ボーアの振動数条件は.

$$\Delta E_{ln} = E_l - E_n$$

$$= (l-n)\cdot\frac{h}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M}}$$

(h) $\Delta E_{ln} = h\nu$ より

$$\nu = \frac{\Delta E_{ln}}{h}$$

また, $c = \nu\lambda_{ln}$ より

$$c = \frac{\Delta E_{ln}}{h}\cdot\lambda_{ln}$$

$$\lambda_{ln} = \frac{hc}{\Delta E_{ln}}$$

$$= \cancel{h}c\cdot\frac{2\pi}{(l-n)\cancel{h}}\sqrt{\frac{M}{k}}$$

$$= \frac{2\pi c}{l-n}\sqrt{\frac{M}{k}}$$