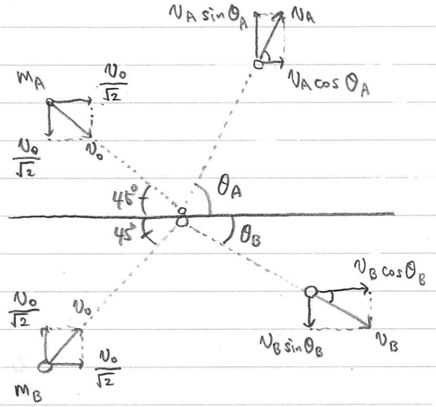
2022 神戸大

I 問1



衝突前の小球A,Bの運動量の和の成分を、それぞれ p_x, p_y とすると、

$$p_x = m_A \cdot \frac{v_0}{\sqrt{2}} + m_B \frac{v_0}{\sqrt{2}} = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}}(m_A + m_B)v_0}$$

$$p_y = -m_A \frac{v_0}{\sqrt{2}} + m_B \frac{v_0}{\sqrt{2}} = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}}(m_B - m_A)v_0}$$

また、衝突後の小球A,Bの運動量の和の成分を、それぞれ p_x', p_y' とすると

$$p_x' = \underline{m_A v_A \cos\theta_A + m_B v_B \cos\theta_B}$$

$$p_y' = \underline{m_A v_A \sin\theta_A - m_B v_B \sin\theta_B}$$

問2　衝突の前後で、運動量の和はそれぞれの成分ごとに独立して保存するので、

$$p_x' = p_x = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}}(m_A + m_B)v_0}$$

$$p_y' = p_y = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}}(m_B - m_A)v_0}$$

2022 神戸大

I 問3 ここで、小球Aの運動のふるまいについて考える。小球Aと小球Bが衝突するときに互いに受ける力はy軸方向のみであるから、小球Aのx軸方向の運動量および速度成分は変化しない。
よって、

$$\frac{v_0}{\sqrt{2}} = v_A \cos\theta_A \quad \text{——} ①$$

また、y軸方向の運動量保存の式

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(m_B - m_A)v_0 = m_A v_A \sin\theta_A - m_B v_B \sin\theta_B \quad \text{——} ②$$

と、反発係数の式

$$1 = \frac{v_A \sin\theta_A + v_B \sin\theta_B}{\frac{1}{\sqrt{2}}v_0 \times 2} \quad \text{——} ③$$

を立式すると、③式より

$$\sqrt{2}v_0 = v_A \sin\theta_A + v_B \sin\theta_B$$
$$v_B \sin\theta_B = \sqrt{2}v_0 - v_A \sin\theta_A$$

これを②式に代入すると、

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(m_B - m_A)v_0 = m_A v_A \sin\theta_A - m_B(\sqrt{2}v_0 - v_A \sin\theta_A)$$
$$= (m_A + m_B)v_A \sin\theta_A - \sqrt{2}m_B v_0$$

$$(m_A + m_B)v_A \sin\theta_A = \sqrt{2}m_B v_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}(m_B - m_A)v_0$$
$$= \frac{3}{\sqrt{2}}m_B v_0 - \frac{1}{\sqrt{2}}m_A v_0$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(3m_B - m_A)v_0 \quad \text{——} ④$$

また、①式を変形して、

$$(m_A + m_B)v_A \cos\theta_A = \frac{1}{\sqrt{2}}(m_A + m_B)v_0 \quad \text{——} ⑤$$

とすると、$\frac{④}{⑤}$ より、

$$\tan\theta_A = \frac{3m_B - m_A}{m_A + m_B} \quad //$$

2022 神戸大

I 問4　一体となった物体が x 軸に対して角度 θ へ速さ v で進んだとすると、運動量保存則より、

$$\begin{cases} \boxed{x} & \frac{1}{\sqrt{2}}(m_A + m_B)v_0 = (m_A + m_B)v\cos\theta \\ \boxed{y} & \frac{1}{\sqrt{2}}(m_B - m_A)v_0 = (m_A + m_B)v\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boxed{x}^2 & \frac{v_0^2}{2} = v^2\cos^2\theta \\ \boxed{y}^2 & \left(\frac{m_B - m_A}{m_A + m_B}\right)^2 \frac{v_0^2}{2} = v^2\sin^2\theta \end{cases}$$
+)

$$\left\{1 + \left(\frac{m_B - m_A}{m_A + m_B}\right)^2\right\}\frac{v_0^2}{2} = v^2$$

であるから、衝突後の運動エネルギーの和は、

$$\frac{1}{2}(m_A + m_B)v^2 = \frac{1}{4}(m_A + m_B)v_0^2\left\{1 + \left(\frac{m_B - m_A}{m_A + m_B}\right)^2\right\}$$

よって、衝突前後における運動エネルギーの和の変化量は、

$$\Delta E = \frac{1}{4}(m_A + m_B)v_0^2\left\{1 + \left(\frac{m_B - m_A}{m_A + m_B}\right)^2\right\} - \frac{1}{2}(m_A + m_B)v_0^2$$

$$= \underline{\frac{1}{4}(m_A + m_B)v_0^2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{(m_B - m_A)^2}{m_A + m_B}v_0^2 \underline{- \frac{1}{2}(m_A + m_B)v_0^2}$$

$$= -\frac{1}{4}(m_A + m_B)v_0^2 + \frac{1}{4}\cdot\frac{m_B^2 - 2m_Bm_A + m_A^2}{m_A + m_B}v_0^2$$

$$= -\frac{1}{4}v_0^2\left[\frac{m_A^2 + 2m_Am_B + m_B^2}{m_A + m_B} - \frac{m_A^2 - 2m_Am_B + m_B^2}{m_A + m_B}\right]$$

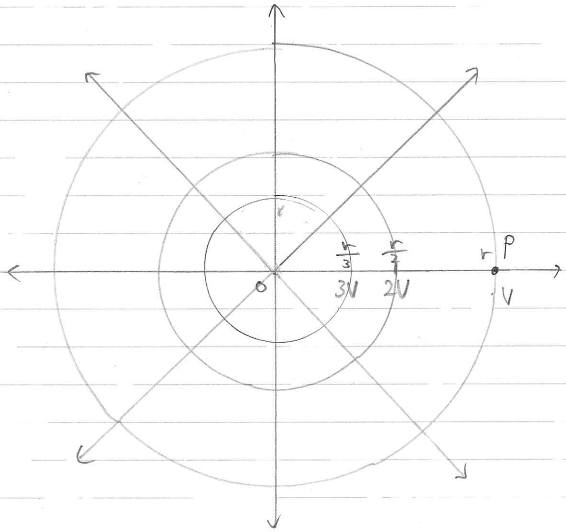
$$= -\frac{1}{4}v_0^2 \cdot \frac{4m_Am_B}{m_A + m_B}$$

$$= \underline{-\frac{m_Am_B}{m_A + m_B}v_0^2}_{\;//}$$

2022 神戸大

II 問1　電場の大きさ　$E = k\dfrac{q}{r^2}$　　電位　$V = k\dfrac{q}{r}$

問2



問3　外力がする仕事

$W = qV$ より

$W = Q \cdot k\dfrac{q}{r}$

$= \dfrac{kQq}{r}$

速さ

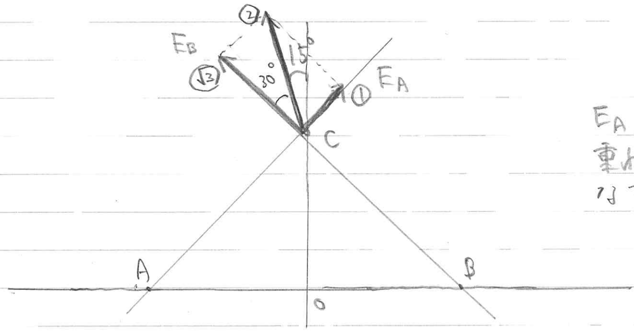
エネルギー保存則より

$\dfrac{kQq}{r} = \dfrac{1}{2}mv^2$

$v^2 = \dfrac{2kQq}{mr}$

$v = \sqrt{\dfrac{2kQq}{mr}}$

問4



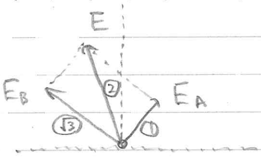
E_A, E_B が y軸となす角が45°, 重ね合わせられた電場Eが y軸となす角が 15° であることから
図のように、1 : 2 : $\sqrt{3}$ の直角三角形が作図できる
よって、
$E_A : E_B = 1 : \sqrt{3}$ より

$k\dfrac{q}{(\sqrt{2}a)^2} : k\dfrac{q'}{(\sqrt{2}a)^2} = 1 : \sqrt{3}$

$q : q' = 1 : \sqrt{3}$

2022 神戸大

II問5



$$E_A = k\frac{q}{(\sqrt{2}a)^2} = \frac{kq}{2a^2}$$ より

$$E = \frac{kq}{a^2}$$

よって運動方程式は

$$m\alpha = QE$$ より

$$m\alpha = \frac{kQq}{a^2}$$

$$\alpha = \frac{kQq}{ma^2}$$

また、点Cでの電位は、

$$V_A = k\frac{q}{\sqrt{2}a}, \quad V_B = k\frac{\sqrt{3}q}{\sqrt{2}a}$$ より

$$V = V_A + V_B = k\frac{q}{\sqrt{2}a} + k\frac{\sqrt{3}q}{\sqrt{2}a} = \frac{(1+\sqrt{3})kq}{\sqrt{2}a}$$

となるので、エネルギー保存則より

$$QV = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2Q}{m}V} = \sqrt{\frac{2Q}{m}\cdot\frac{(1+\sqrt{3})kq}{\sqrt{2}a}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})kQq}{ma}}$$

2022 神戸大

Ⅲ問1 内部エネルギー

$$E = \frac{3}{2}nRT$$

圧力

$PV = nRT$ より

$PL^3 = nRT$

$$P = \frac{nRT}{L^3}$$

問2 粒子の総数をNとすると、

$$E = \frac{3}{2}kT \times N$$

$$= \frac{1}{2}m\overline{v^2} \times N$$

$N = nN_A$

$$= \frac{1}{2}m\overline{v^2} \cdot nN_A$$

圧力は、

$$P = \frac{nRT}{L^3}$$

$E = \frac{3}{2}nRT \Leftrightarrow nRT = \frac{2E}{3}$

$$= \frac{1}{L^3} \cdot \frac{2E}{3}$$

$E = \frac{1}{2}m\overline{v^2}nN_A$

$$= \frac{1}{L^3} \cdot \frac{\cancel{2}}{3} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}m\overline{v^2}nN_A$$

$$= \frac{1}{3L^3} \cdot m\overline{v^2}nN_A$$

問3 問1, 問2 より、2つの圧力表現を等式でつなぐと

$$\frac{\cancel{n}RT}{\cancel{L^3}} = \frac{1}{3\cancel{L^3}} \cdot m\overline{v^2}\cancel{n}N_A$$

$$3RT = m\overline{v^2} \cdot N_A$$

$$\overline{v^2} = \frac{3RT}{mN_A}$$

2022 神戸大

Ⅲ 問4　問3より

$$\overline{v^2} = \frac{3 \cdot 8.3 \cdot 600}{6.6\times10^{-27} \cdot 6.0\times10^{23}}$$

$$= \frac{\cancel{3} \cdot 8.3 \cdot \cancel{600}}{\cancel{66}\times10^{-28} \cdot \cancel{600}\times10^{21}}$$

22

$$= \frac{8.3}{22}\times10^{7}$$

$$= \frac{83}{22}\times10^{6}$$

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{83}{22}\times10^{6}}$$

$$\fallingdotseq \sqrt{\frac{88}{22}\times10^{6}}$$

$$= \sqrt{4\times10^{6}}$$

$$= 2\times10^{3}\ \mathrm{m/s}$$

有効数字1ケタなので、多少勝手に数字を変えても答えに影響しない。

問5　(例)

気体を入れた容器の壁に、きわめて多数の分子が衝突して、はね返る際に分子が壁に撃力を与えるため。

(河合塾)

気体分子が容器の壁に衝突してはね返る際、容器の壁が気体分子から力積を受けるため。

(東進)

気体分子は運動しており、壁に衝突した際に壁から力積を受け、壁も反作用として力を受けるから。